教师基本功丛书·数学教师卷

◎编著 任升录 黄根初
沈全洪 尹德好

数学作业的设计与评价



ShuXueZuoYeDeSheJiYuPinJia

华东师范大学出版社



教师基本功丛书·数学教师卷

如何备好一堂数学课

如何上好一堂数学课



数学作业的设计与评价

数学学困生的转化

如何命数学题

数学试卷分析方法

数学教育课题研究及论文撰写指导

多媒体数学课件制作

ISBN 978-7-5617-7239-3



9 787561 772393 >

定价：16.00元

www.ecnupress.com.cn

教师基本功丛书

数学教师卷

数学作业的设计与评价

编著　任升录　黄根初　沈金洪　尹德好



华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学作业的设计与评价/任升录等编著.—上海:华东师范大学出版社,2009
(教师基本功丛书·数学教师卷)
ISBN 978-7-5617-7239-3

Ⅰ.数… Ⅱ.任… Ⅲ.数学课—教学研究—中小学
Ⅳ.G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 185368 号

教师基本功丛书·数学教师卷

数学作业的设计与评价

编　　著　任升录　黄根初　沈全洪　尹德好
策划组稿　李文革
审读编辑　平　萍　曹祖红
封面设计　黄惠敏

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电话总机　021-62450163 转各部门　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　江苏句容排印厂
开　　本　890×1240　32 开
印　　张　8
字　　数　209 千字
版　　次　2009 年 10 月第一版
印　　次　2009 年 10 月第一次
印　　数　3100
书　　号　ISBN 978-7-5617-7239-3/G·4190
定　　价　16.00 元

出 版 人　朱杰人



前　言

本书的读者对象为中小学教师和普通教育研究人员。

数学作业的设计与评价是数学教学的重要组成部分。本书从我国中小学数学作业的现状出发，结合案例，对数学作业的各个环节进行了分析。具体包括设计、布置、批改、管理、讲评五部分，都是具有很强的教师个性实践特征的内容。

全书共分四章。第一章是数学作业的概论，主要对数学作业的现状、意义和类型作了描述性分析。第二章介绍数学作业设计的意义、原则以及如何设计不同课型的数学作业。第三章结合案例对作业布置的要求、批改的意义和原则、批改的方法以及作业的管理进行了较为详细的分析。第四章主要介绍作业讲评的原则、内容，并结合实例简要介绍讲评的方法。考虑到本书的主要读者对象，在写作过程中尽量贴近教学实际，注重实践操作，能用实例的地方尽量用实例说明。

全书的整体构思由任升录、黄根初、沈全洪共同讨论形成，任升录列出写作提纲。全书初稿第一章由任升录完成，第二章由黄根初完成，第三章由尹德好和任升录共同完成，第四章由沈全洪完成，蔡莉娜参与了部分内容的编写。最后由任升录作了统稿和润饰。评价思想贯穿全书，全书各章既是有机联系的整体，又自成体系。

作业凝聚着老师们辛勤的劳动，包含着深深的师生情怀。中小学教师都要为自己的学生准备作业，每一位数学教师对作业的设计与批改都有自己的理解，形成了约定俗成的操作方法，讲评的实践经验也十分丰富。本书的作者都长期在中小学第一线从事数学教

学和教学研究工作，因此，全书内容是作者教学中做法和思考的一种反映。

华东师范大学出版社基础教育分社李文革先生对本书的选题与出版给予了很多具体的指导和建议，上海市静安区教育学院在成书过程中给予了切实的关怀。上海市华东模范中学徐鑫老师和成梁老师、上海市培明中学敖金昱老师和桂齐复老师、上海市民立中学陈洁玉老师、上海市育才初级中学王进敬老师和但水平老师等为本书的编写提供了部分素材和案例，在此谨致以谢意。

本书在编著过程中，参阅了很多文献，并引用了其中的一些材料，一般在引用时都已注明出处，个别案例是取自一些学校的网上材料，也都注明了来源。由于写作时间跨度较长，有些文献未在正文中一一列出标明，谨在书后参考文献中列出，在此表示衷心的感谢！

由于编著者水平和资料所限，加上作业设计与评价的多元化特征，书中难免存在瑕疵和争议，祈请专家与同行不吝赐教，并欢迎广大读者批评指正。

任升录

2009 年 9 月于上海



目　　录



第一章 数学作业概论

第一节 数学作业的现状分析

作业一直是学校教学工作的一个重要组成部分。近年来，随着“减负”、“增效”问题引起人们的关注，对作业的看法已经成了争论的焦点。拥护者认为作业特别是家庭作业可以鼓励学生的主动性，培养独立学习的技能，让学生有时间巩固、应用和适当拓展在学校所学的知识；批评者认为作业侵占了学生太多的时间，使他们不能自由参加课外活动或户外活动。

一、数学作业的案例呈现

对作业的意见虽然很难统一，但对它的性质和目的还是有大体一致的看法：它是正式布置的学校功课。关于家庭作业的问题，在这几十年间不断引起教育者和家长的讨论和思考。这些讨论中包含了三个基本的问题：家庭作业是否有助于学生的学习？布置多少家庭作业才是合适的？布置什么类型的家庭作业才是最好的？[①] 我们从两类案例开始展开讨论。

---

① 施良方，崔允漷主编.《教学理论：课堂教学的原理、策略与研究》. 华东师大出版社，1999 年 8 月，第 360 页

（一）数学特级教师的作业设计案例

数学特级教师设计作业的方式、方法对于我们进行作业研究具有指导意义，特别是他们在具体操作中所积累的宝贵经验，成为教师进行作业设计时的坐标，因此通过对他们所设计的作业进行分析和研究，可以为作业研究提供实践方面的参考。

案例："线段的垂直平分线"作业（课堂）①

1. 基础性诊断作业

问题：在公路的同侧有两个村庄，现要在公路上建一车站，使车站距两村的距离相等，如何确定车站的位置？

数学化处理：把公路命名为 L，把两个村庄命名为 A、B，待建的车站命名为 C。学生画出草图，经过讨论分析，得出：(1)车站 C 在公路 L 上；(2)车站 C 到 A、B 两村的距离相等。解决问题的关键在于找出所有满足条件(2)的点。

2. 发展性诊断作业

问题：能否找到一个点，使它到 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A、B、C 的距离相等？这样的点若存在，有几个？如何找？在什么位置？

处理：引导学生运用集合的思想，采用交轨方法展开讨论，交流学生相互讨论的结果，教师完善。

3. 理解性诊断作业

(1) 如图 1，DE 是 $\triangle ABC$ 边 AB 的垂直平分线，交 AB、BC 于 D、E。若 $BD=3$，则 $AD=$________；若 $\angle B=40°$，$\angle BAC=70°$，则 $\angle CAE=$________。

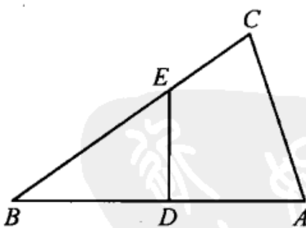


图 1

(2) 已知线段 AB，1)若 $CA=CB$，问：过 C 点的直线是不是线段 AB 的垂直平分线？为什么？2)若 $CA=CB$，$DA=$

---

① 赵公明."线段垂直平分线"教案,《中学数学名师教学艺术》(雷玲主编).华东师大出版社,2008 年 3 月,第 161 页

DB，问：过 C 和 D 两点的直线是不是线段 AB 的垂直平分线？为什么？

(3) 已知：如图 2 所示，在$\triangle ABC$ 中，边 AB、BC 的垂直平分线相交于点 P。求证：$PA = PB = PC$。

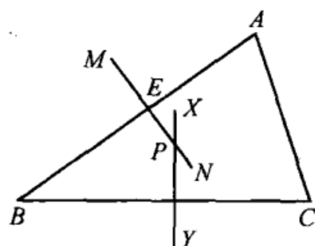


图 2

4. 自主性诊断作业

已知：$\angle AOB$ 和$\angle AOB$ 内两点 C、D，(1) 求作$\angle AOB$ 的平分线；(2) 求作点 P，使 $PC = PD$，且 P 点到$\angle AOB$ 两边的距离相等。

案例分析：本作业设计按照 4 个阶梯设计，层次分明，重心突出，围绕“线段垂直平分线”与“到线段两个端点距离相等的所有点”之间的关系，以及应用于解决一些点的位置等问题，通过恰当的作业，让学生掌握线段的垂直平分线定理、逆定理，并能够进行有关应用。通过各有训练侧重点的组合，教师较为清晰地把握了学生学习过程中存在的问题，较为准确地对学生进行有效的诊断，较为准确地提升学生的思维水平，从而有效地提高教学质量，最大可能地促进学生的发展。

虽然本设计是用于课堂作业，但是对于一般作业的设计与讲评具有很好的启发意义。

每位学生都有自己的期望，老师对学生也有期望。老师应尊重学生自己的期望，给学生一些机会，让他自己去体验，学生就会懂得珍惜。给学生一些困难，让他自己去解决，学生就会生长勇气。给学生一些问题，让他自己去找答案，学生就会增长智慧。给学生一些条件，让他自己去锻炼，学生就会懂得成长。给学生一片空间，让他自己向前走，学生就会成为自己发展和成长的主人。老师为学生搭建“成功阶梯”，即每一位学生通过自己的努力克服了困难后而取得学习的新收获、成长的新起点、发展的新高度，最大限度地促进学生自主学习。①

---

① 赵公明.课堂教学艺术之一：“备”学生的妙招，《中学数学名师教学艺术》(雷玲主编).华东师大出版社，2008 年 3 月，第 149—150 页

（二）成熟数学教师的作业布置与批改案例

成熟数学教师一般指在同一学段从事数学教学工作 5 年以上的、能够独立承担教育教学工作的教师。他们的作业设计与评价水平从一个方面反映了当前教师的普遍水平，对我们真实了解数学作业的现状具有一定的研究意义。

案例：上海市某重点中学高中教龄 8 年的一级中学教师，在高一指数方程和对数方程三节课所布置的课后作业。

2009 年 2 月 12 日，指数方程和对数方程第一节课（基本内容）课后作业：

1. 解指数方程 $5^{x-1} \cdot 10^{3x} = 8^x$。

2. 解指数方程 $3^x - 3^{-|x|} = 2$。

3. 解方程 $(\log_4 x)^2 - \dfrac{1}{2}|\log_2 x| - 2 = 0$。

4. 已知 $f(x) = \log_a(a^x - 1)$ $(a > 0, a \neq 1)$，解方程 $f(2x) = f^{-1}(x)$。

5. 已知 $f(x) = a^{x-\frac{1}{2}}$，$f(\lg a) = \sqrt{10}$，求 a。

说明：上海高中教材把《幂函数、指数函数和对数函数》分为上、下两部分，其中“下”包括对数、对数函数的图象和性质、简单的指数方程与对数方程等内容，在高一第二学期开始阶段教授。由于是重点中学，学生水平普遍较高，所以教学进度较快、深度较深，课本配套练习基本上都在课堂上处理完毕，非常基本的习题由学生自行处理。课后作业绝大多数是教师额外编选的习题，难度起点是课本练习，整体难度高于课本要求。

2009 年 2 月 13 日，指数方程和对数方程第二节课（提高内容）课后作业：

1. 已知 $25^x - a \cdot 5^x + a = 0$ 有两个不同的实数解，求 a 的取值范围。

2. 已知 $4^x + a \cdot 2^x + a + 1 = 0$ 有实数解，求 a 的取值范围。

3. 已知方程 $\ln^2 x - \ln x^2 - 2 = 0$ 的两根为 α、β $(\alpha > \beta)$，1）求

$\alpha \cdot \beta$; 2)求$\frac{\alpha}{\beta}$。

4. 若关于 x 的方程 $\lg(ax) \cdot \lg(ax^2) = 4$ 有两个小于 1 的正根，求 a 的取值范围。

5. 已知 $f(x) = x^2 \lg a + 2x + 4\lg a$ 的最大值为 3，求 a。

6. 关于 x 的方程 $\log_2 x + 1 = 2\log_2(x-a)$ 恰有一解，求 a 的取值范围。

说明：由于 2 月 13 日是星期五，老师另外还印发了一份周末练习卷，包含填空题 13 道、选择题 5 道、解答题 6 道，内容涉及指数函数、对数函数以及指数方程和对数方程的内容，具有相当的综合性，还有一道具有实际意义的应用题。

2009 年 2 月 16 日，指数方程和对数方程第三节课(提高内容)课后作业：

1. 解方程 $\log_2(4^x + 4) = x + \log_2(2^{x+1} - 3)$。

2. 已知 $f(x) = \log_a x\ (2 \leqslant x \leqslant 4)$ 最大值比最小值大 2，求 a。

3. 已知 $f(x) = x^2 - x + k$，满足 $\log_2 f(a) = 2$，$f(\log_2 a) = k$ $(a > 0,\ a \neq 1)$，求 $f(\log_2 x)$ 的最小值及相应的 x。

4. 在圆内，1 弧度的圆心角所对的弦长为 2，则这个圆心角所对的弧长为多少？

5. 扇形 OAB 的面积为 1 cm²，周长为 4 cm，求它的圆心角和弦 AB 的长。

说明：由于星期一的数学课在下午，老师已经对周末训练卷作了批阅，所以上课开始的半节课订正讲评了该卷几道学生出错较多的题目，后半节课讲授新课《弧度制》，所以选择了 3 道复习性的题目，加上 2 道新课题目。

学生作业情况扫描与分析

说明：为保持学生作业原貌，按照学生原始作业本顺序自然扫描，没有做进一步的加工。

1. $5^{x-1}\cdot 10^{3x}=8^{x}$

解 $5^{x-1}\cdot 5^{3x}\cdot 2^{3x}=2^{3x}$

$x-1+3x=0$

$x=\frac{1}{4}$

2. $3^{x}-3^{-|x|}=2$

解 1° $x\geq 0$

$3^{x}-3^{-x}=2$

$3^{2x}-1=2\cdot 3^{x}$

$3^{2x}-2\cdot 3^{x}-1=0$

设 $3^{x}=t$ $(t>0)$

$t^{2}-2t-1=0$

$t=1+\sqrt{2}$ $t=1-\sqrt{2}$ (舍) $3^{x}=1+\sqrt{2}$ $x=\log_{3}(1+\sqrt{2})$

2° $x<0$ $0=2$ 无解 $\therefore x=\log_{3}(1+\sqrt{2})$

3. $(\log_{4}x)^{2}-\frac{1}{2}|\log_{2}x|-2=0$

解 $(\log_{4}x)^{2}-|\log_{4}x|-2=0$

$(|\log_{4}x|+1)(|\log_{4}x|-2)=0$

$\therefore |\log_{4}x|+1=0$ 或 $|\log_{4}x|-2=0$

$|\log_{4}x|=-1$ (舍去) $|\log_{4}x|=2$

$\therefore x=16$ 或 $x=\frac{1}{16}$

经检验 $x=16$ 或 $x=\frac{1}{16}$ 是方程的解

4. 设 $f(x)=\log_{a}(a^{x}-1)$ $(a>0, a\neq 1)$

解方程 $f(2x)=f^{-1}(x)$

解 $y=\log_{a}(a^{x}-1)$

$a^{y}=a^{x}-1$

$a^{x}=a^{y}+1$

$x=\log_{a}(a^{y}+1)$

$\therefore f^{-1}(x)=\log_{a}(a^{x}+1)$

$\therefore \log_{a}(a^{2x}-1)=\log_{a}(a^{x}+1)$

$a^{2x}-1=a^{x}+1$

$a^{2x}-a^{x}-2=0$

$a^{x}=2$ 或 $a^{x}=-1$ (舍)

$\therefore x=\log_{a}2$

经检验 $x=\log_{a}2$ 是方程根

5. $f(x)=a^{x-\frac{1}{2}}$　$f(\lg a)=\sqrt{10}$ 求 a

解 $a^{\lg a-\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$

$\lg a^{\lg a-\frac{1}{2}}=\lg\sqrt{10}$

$\lg a^{\lg a-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

$(\lg a-\frac{1}{2})\cdot\lg a=\frac{1}{2}$

$\lg^2 a-\frac{1}{2}\lg a=\frac{1}{2}$

$2\lg^2 a-\lg a-1=0$

$(\lg a-1)(2\lg a+1)=0$

$\lg a-1=0$ 或 $2\lg a+1=0$

∴ $\lg a=1$ 或 $2\lg a=-1$

∴ $a=1$ 或 $a=\frac{\sqrt{10}}{10}$

经检验 $a=1$ 是增根舍去

$a=\frac{\sqrt{10}}{10}$ 是方程的根

1. $25^x-a\cdot 5^x+a=0$ 有两个不同的实数解，求 $a\in$

解：设 $t=5^x$　$(t>0)$

$t^2-at+a=0$

$\begin{cases}\Delta>0\\ t>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2-4a>0\\ a>0\end{cases}$

$\Rightarrow a>4$

$f(x)=a^{x-\frac{1}{2}}$　$f(\lg a)=\sqrt{10}$ 求 a.

$\lg a-1=0$ 或 $2\lg a+1=0$

∴ $a=10$ 或 $a=\frac{\sqrt{10}}{10}$

经检验 $a=10$ 或 $a=\frac{\sqrt{10}}{10}$ 是方程的解

2. $4^x+a\cdot 2^x+a+1=0$ 有实数解 求 $a\in$?

解 设 $t=2^x$　$(t>0)$

$t^2+at+a+1=0$　$(t>0)$ 有解

$a(t+1)=-1-t^2$

~~$a=0$ 不~~ $t=-1$ 不是方程的解

$a=\frac{-1-t^2}{t+1}$

分析：本次作业学生前 4 道完全正确，书写也比较规范，表明该生对绝对值的意义、因式分解、指数方程和对数方程的基本解法都已经很好地掌握。第 5 题的解答在总体上也是正确的，只是由 $\lg a=1$ 错误得出 $a=1$，这是对以 10 为底的常用对数不熟悉。我们看到在订正时，学生整题解答都重新写了一遍，题目也重新抄了一遍，经了解这是老师的要求。

$\therefore y = \frac{-1-t^2}{t+1}$

$y = \frac{-(t+1)^2+2t+2-2}{t+1} = -(t+1)+2-\frac{2}{t+1}$

$\leq -2\sqrt{2}+2$

当且仅当 $t+1=\frac{2}{t+1}$ $t=-1+\sqrt{2}$ 取"="

$\therefore a \leq -2\sqrt{2}+2$

3. 已知方程 $\ln^2 x - \ln x^2 - 2 = 0$ 的两根为 α、β $(\alpha>\beta)$

1) 求 $\alpha\cdot\beta$ 2) 求 $\frac{\alpha}{\beta}$

解：1) 设 $t=\ln x$

$\ln\alpha$, $\ln\beta$ 是 $t^2-2t-2=0$

$\ln\alpha\cdot\beta = \ln\alpha+\ln\beta=2$

$\therefore \alpha\beta=e^2$

2) 设 $t=\ln x$ $t^2-2t-2=0$

$(\ln\frac{\alpha}{\beta})^2=(\ln\alpha-\ln\beta)^2=(\ln\alpha+\ln\beta)^2-4\ln\alpha\ln\beta$

$=4+2\times 4=2\sqrt{3}$

$\therefore \ln\frac{\alpha}{\beta}=2\sqrt{3}$

$\frac{\alpha}{\beta}=e^{2\sqrt{3}}$

4. 若关于 x 的方程 $\lg(ax)\cdot\lg(ax^2)=4$ 有两个小于1的正根，求 $a\in$?

解：$2\lg^2 x+3\lg a\lg x+\lg^2 a-4=0$

设 $t=\lg x$ ∵ $0<x<1$ ∴ $t<0$

$2t^2+3\lg a\,t+\lg^2 a-4=0$ 在 $(-\infty,0)$ 有两根

$\begin{cases}\Delta\geq 0\\ -\frac{3}{2}\lg a<0\\ \lg^2 a-4>0\end{cases}$

$\therefore a>100$

5. $f(x)=x^2\lg a+2x+4\lg a$ 最大值为3，求 a

解：1° $x=0$ $4\lg a=3$

$\therefore a=10^{\frac{3}{4}}$

分析：本次 6 道题都是难度较大且不单纯是解方程问题。第 5 题所犯的错误，不是因为解方程不会，而是对函数最大值的意义理解不正确所致，从后面的订正来看这一问题并没有得到解决。说明批改作业时仅圈出错误所在处，而不研究错误的本质，效果是不好的。

2° $x \neq 0$ 设 $\lg a = t$

$f(x) = x^2 t + 2x + 4t$

$= t(x^2 + \frac{2}{t}x) + 4t$

$= t(x + \frac{1}{t})^2 + 4t - \frac{1}{t}$

∵ $f(x)$ 有最大值 ∴ $t < 0$

∴ $4t - \frac{1}{t} = 3$　$4t^2 - 1 = 3t$

∴ $4t^2 - 3t - 1 = 0$ 舍

∴ $t = 1$ 或 $t = -\frac{1}{4}$　∴ $\lg a = -\frac{1}{4}$

∴ $a = 10^{-\frac{1}{4}}$

6. 关于 x 的方程 $\log_2 x + 1 = 2\log_2(x-a)$ 恰有一解，求 $a \in$?

解 $\log_2 x + \log_2 2 = \log_2 (x-a)^2$

$\log_2 2x = \log_2 (x-a)^2$

∴ $\begin{cases} 2x = (x-a)^2 \\ x > 0 \end{cases}$ 只有一解

∴ $a = x - \sqrt{2x}$ $(x>0)$ 只有一解

$y_1 = a$　$y_2 = x - \sqrt{2x}$

设 $\sqrt{x} = t$　$t > 0$

$f(t) = t^2 - \sqrt{2}t = (t - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \frac{1}{2}$

∴ $f(t)_{max} = f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{2}$

∴ $y_{2min} = y(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

∴ $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $a > 0$

5. $f(x) = x^2 \lg a + 2x + 4\lg a$，最大值为3，求 a

解 设 $\lg a = t$

$f(x) = x^2 t + 2x + 4t$

$= t(x + \frac{1}{t})^2 + 4t - \frac{1}{t}$

∵ $f(x)$ 有最大值 ∴ $t < 0$

$4t - \frac{1}{t} = 3$　∴ $t = 1$(舍) 或 $t = -\frac{1}{4}$

∴ $\lg a = -\frac{1}{4}$　∴ $a = 10^{-\frac{1}{4}}$

6 关于 x 的方程 $\log_2 x + 1 = 2\log_2(x-a)$

$\log_2 2x = \log_2 (x-a)^2$

$\begin{cases} 2x = (x-a)^2 \\ x > 0 \end{cases}$ 只有一解

$y_1 = a$　$y_2 = x - \sqrt{2x}$　设 $\sqrt{2x} = t$　$t > 0$

$f(t) = t^2 - \sqrt{2}t = (t - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \frac{1}{2}$

分析：第 6 题学生的解法很巧妙，把方程只有一解问题转化为两个函数 $y_1 = a$ 和 $y_2 = x - \sqrt{2x}$ 图象的交点问题，但是画图或者对最值理解有问题，导致解答不对，这一点我们可以借助该生的订正得到肯定。老师批改时，如果对学生的巧妙解法适当肯定，这种及时的鼓励，会更好地激发学生对数学的兴趣。按部就班，严格规范，一成不变的批改，虽说学生能够完全按照老师的要求完成作业与订正，从班级的层面上能够提高整体水平，学生个人也能够得到扎实的训练，但是对学生精细化学习和个性化提高帮助不大。在批改和讲评环节还有很多事情可做。

$\therefore f(t)_{min} = f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{2}$

$\therefore y_2\ min = -\frac{1}{2}$

$\therefore a = -\frac{1}{2}$ 或 $a \geq 0$.

1. $\log_2(4^x+4) = x + \log_2(2^{x+1}-3)$

解: $\log_2(4^x+4) = \log_2 2^x + \log_2(2^{x+1}-3)$

$4^x + 4 = 2^x(2^{x+1}-3)$

$2^{2x} + 4 = 2^{2x+1} - 3\cdot 2^x$

设 $t = 2^x$ $(t>0)$

$t^2 + 4 = 2t^2 - 3t$

$t^2 - 3t - 4 = 0$

$(t+1)(t-4) = 0$

$\therefore t = -1$ (舍) $t = 4$

$4 = 2^x$ $x=2$ 经检验 $x=2$ 是方程的根.

2. $f(x) = \log_a x$ $(2 \leq x \leq 4)$ 最大值比最小值大2，求 a

解 $1°$ $0<a<1$ $f(x)$ 在 $[2,4]$ ↓

$f(x)_{max} = f(2) = \log_a 2$

$f(x)_{min} = f(4) = \log_a 4$

$\log_a 2 = \log_a 4 + 2$

$2 = 4a^2$

$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2°$ $a>1$ $f(x)$ 在 $[2,4]$ ↗

$f(x)_{max} = f(4) = \log_a 4$ $f(x)_{min} = f(2) = \log_a 2$

$\log_a 4 = \log_a 2 + 2$ $\therefore a = \sqrt{2}$

$\therefore a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $a = 2$

3. $f(x) = x^2 - x + k$，满足 $\log_2 f(a) = 2$

$f(\log_2 a) = k$ $(a>0, a \neq 1)$

求 $f(\log_2 x)$ 的最小值及相应的 x.

解: $\log_2(a^2 - a + k) = 2$

$(\log_2 a)^2 - (\log_2 a) + k = k$

$(\log_2 a)^2 = \log_2 a$

$\therefore a = 2$ 或 $a = 1$ (舍)

$\therefore \log_2(4 - 2 + k) = 2$

$\therefore k = 2$

$\therefore f(x) = x^2 - x + 2 = (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$

$\therefore f(x)_{min} = f(\frac{1}{2}) = \frac{7}{4}$

$\therefore \log_2 x = \frac{1}{2}$

$\therefore x = \sqrt{2}$

$\therefore f(\log_2 x)_{min} = \frac{7}{4}$

此时 $x = \sqrt{2}$

4. 在圆内，1弧度的圆心角所对的弦长为2，则这个圆心角所对的弧长为多少？

解 $r = \sin\frac{180}{\pi} = 2.09$

$l = \alpha \cdot r = 2.09$

5. 扇形 $OAB = 1cm^2$，周长为4cm，求它的圆心角和弦AB的长

解 $\begin{cases} \frac{1}{2}lr = 1 \\ 2r + l = 4 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} r = 1 \quad cm \\ l = 2 \quad cm \end{cases}$

$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{2}{1} = 2 \ rad$

$\therefore n = (\frac{360}{\pi})$

$AB = 2 \times \sin(\frac{180}{\pi}) = 1.68 \ cm$

2

66

4. 在圆内，1弧度的圆心角所对的弦长为2，则这个圆心角所对的弧长为多少？

过 $OM \perp AB$ 于 M，$AM = MB = 1$

在 $Rt\triangle AMO$ 中

$\angle AOM = \frac{1}{2} rad$

$\frac{AM}{AO} = \sin\frac{1}{2}$

$r = AO = \frac{AM}{\sin\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$

$l_{AB} = \alpha r = 1 \cdot \frac{1}{\sin\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$

5. 扇形 $OAB = 1cm^2$，周长为4cm

求它的圆心角和弦AB的长

$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2}lr \\ 4 = l + 2r \end{cases}$

$r = 1 \quad l = 2$

$\alpha = \frac{l}{r} = 2 \ rad$

弦长 $AB = 2 \times \sin(\frac{180}{\pi}) = 2\sin 1$

③ 求与

在 (

解 $\alpha =$

2π

$\therefore ($

说明：该校作息时间为早晨八点开始上课，每节课四十分钟，上午四节课，下午四节课，下午四点半放学。

分析与结论

通过对原始资料的分析，我们可以获得关于作业的四方面重要信息：作业在数学老师的教学中所占比重很高，老师批改作业方法比较固定且对学生的错误要求全部订正，学生能够完成老师布置的作业但是缺乏自己对数学进行思考整理的时间，布置作业和批改作业的质量都还有很大的提高空间。

从所布置作业的量来看，作为重点中学是比较合适的，学生能够完成全部作业，但是课本练习题多是在课内处理掉的，因此教学密度高、节奏快，学生的课堂作业量也很大。以课本中简单的指数方程、简单的对数方程两节为例，除课本练习题外，配套习题册共有12 大题（21 小题）①，这些习题即使处理 50%，也需要占用相当多的时间。按照课本的要求，习题册是高中数学课本的组成部分，既有重在数学知识理解和巩固的基础性训练，又有掌握数学思想方法的发展性训练；习题册的编写以课程标准为依据，以教材为基础，以提高学生的数学素养为核心，通过多种形式、不同层次、不同要求的问题，为学生提供多种实践的机会。习题册中的多数题目都是需要学生学习和解答的。这样分析下来，可以看出，学生总的作业量还是相当大的。由于老师对学生错误较多的习题在课堂上进行订正，再加上本身的课堂作业时间，因此处理作业问题占用了一定的教学时间。

从三节课的作业批改，我们发现老师能够做到当天的作业当天批改，次日发给学生。批改方式以使用符号为主，并注明批阅的日期，如果发现学生有解答错误的地方，则写“订正”，以提醒学生不要忘记订正环节。通过连续查阅该老师班级学生的作业本，发现老师也用一些批语，多是评价性的词语，如“好”、“认真”；偶尔也有提醒

---

① 高级中学课本《数学》（练习部分）高一年级第二学期．上海教育出版社，2007 年，第 7—9 页

语句，如“注意书写格式”、“少做了一道题”等；对于书写不完整或者过程不清晰的作业，老师也会适当用红笔补充一些过程性算式。总的来说批改作业方法比较固定，要求学生有错误的题目全部订正。批改作业的个性化特征不明显，对学生的解法特点也不太关注，没有很好利用作业批改环节实现教学的个别化。

从学生解答过程来看，作业在促进学生独立思考和了解学生规范表达等方面能够起到积极作用。从学生作业解答的书写量(包括订正)来推断，学生完成上面呈现的作业平均一次不会少于25分钟，加上抄题目和思考的时间，还会更多一些。周末有一张练习卷放在那里，额外不会有太多的时间自己去思考。从学生订正的情况看，基本都是对原来的问题进行改正，可以说仅仅做到就事论事，没有很好地去思考出错的根源，因此订正的效果还有待提高，这与学生学习任务较重有一定的关系。

学生的作业负担是否可以在不降低质量的前提下，适当减轻一些？从上面呈现的作业来看，还是完全有可能的。学生的学习随着年龄和年级的增加，其综合性和抽象性都可以不断加强，但是这种综合性不是随着教学内容的完成而自然完成的，即使从知识层面讲，一些习题学生可能没有障碍，但是所用思想方法学生并没有到了很好理解的地步。以作业题“关于x的方程$\log_2 x+1=2\log_2(x-a)$恰有一解，求a的取值范围”为例，该题常规的讨论式解法过程比较繁琐，学生想到用图象处理，但是对其中的涵义并不完全理解，或者说仅能够在形式上理解，而且关于解的个数问题也不是本部分内容的重点，因此用比较基本的习题，突出了方法就能够满足教学需要，进一步的综合可以放到总复习时再回过头来处理，学生的理解障碍会小得多，作业的合适性和作业的质量都还有进一步提高的余地。如何合理设计作业，需要深入研究和探索。这需要老师在时间和精力上大量的投入，也需要在业务上深入钻研才可能实现。作业出现错误怎么订正？是否千篇一律要学生把题目和解答都重新完整地重写一遍？是否可以在针对性方面做些文章？是否考虑过订正的

效果怎么样？有没有解决学生切实存在的问题？学生有没有认识到自己哪里做得好哪里还有不足？我们发现，作业设计、批改和讲评等环节都有很大的改进和提高的空间。

二、数学作业的现状描述

对于作业这个环节，许多教师存在这样的一些认识："同种类型作业多做几道会记得牢靠一些，熟能生巧"、"不同类型作业多做一些总是好的，见多识广"、"做作业总比几个同学打打闹闹或者待在家里看电视要好"、"我辛辛苦苦找题目、编题目，多布置几道题目，不都是为你们好吗?"、"做得不好，要你们重做或者再多做几道，不还是怕你们学不好吗!"教师对作业的认识常常是根深蒂固，需要经过长期的争鸣和理论。

（一）20年的现状变化

进入上世纪80年代中后期以来，国家对中小学生的作业现状一直非常关心和重视。1987年田万海先生主持的全国初中数学教学大规模调查就是突出的例子。这次调查对全国初中数学作业的现状得出了非常可靠的第一手数据，通过科学分析后得出结论：认真完成作业是学好数学的必要环节。据统计，58.6%的学生基本上能独立完成作业。对子样进行测试成绩与完成作业情况的独立性检验，得 χ^2 值为56.90，而 $\chi^2(0.05, 12)=21.03$，可见能否独立完成作业对学习成绩有显著影响。据子样统计，在不能独立完成作业的学生中，有37.0%的人总分在40分以下（满分120分），63.0%的人总分在80分以下。要提高数学教学质量，就要教育学生独立完成作业，并注意对学生作业的检查，及时获取反馈信息。

教师对学生的作业，以及对学生在学习过程中所产生的错误，都是能够认真对待的。有70.0%的教师批改全部作业，其余的教师采用"教师、学生各批改部分作业"的方法。对学生学习中所产生的错误，采用"全班讲评为主、个别纠正为辅"的教师占50.3%，采用"全班讲评与个别纠正并重"的占25.6%，没有"既不作全班讲评也

不作个别纠正"的现象。[①]

到了上世纪90年代中后期,减轻学生过重的学业负担已经成为全社会的共识。在这样的背景下,各地陆续对包括作业在内的课业负担现状进行了大规模的调查。

1995年上海市小学生课业负担调查报告显示:从一年级开始,有近40%的小学生感到学业负担"较重"和"重",其中占学生总数7.7%的学生感到学业很重。从三年级开始,感到学业负担"较重"和"重"的比重达到49.6%,占了近一半,到了五年级达到59%。由于过重的负担,学生深感睡眠严重不足。在被调查的8000多名小学生中,有74.4%的人需要家长叫才能起床,其中需要叫一次的占52%,两次及以上者占22.4%;一年级睡眠不足的为44.4%,二年级为44.2%,三年级为48.5%,四年级为52.9%,五年级为58.7%,随年级升高而人数增加。[②]

1997年,大连市小学生的课外作业量调查结果显示:大连市小学生的课外作业量普遍超标,过多的课外作业对小学生的身心发展造成了损害,在调查中,小学生每天做作业感到很累或比较累的各年级百分比分别是:二年级61%,三年级46.2%,四年级37%,五年级31%,六年级21%。长时间地完成教师布置的作业也使小学生在心理上厌烦做作业,并导致厌学情绪的产生,每天做作业感到苦恼或较苦恼的约占被调查学生总数的9%。[③]

和西方发达国家相比,我国中小学生的家庭作业一直是偏多的(如下表所示),目前我国小学生一天的作业量相当于美国小学生的一周作业量,甚至还多得多。在教学科目不断增加的情况下,家庭

---

① 田万海主编.1987年全国初中数学教学调查与分析.华东师大出版社,1990年6月,第33页、36页

② 转引自:段鸿,高正玲.教学论应重视学生作业问题研究.固原师专学报(社会科学),1999年2月

③ 姜丽华.优化小学生课外作业数量的研究——从大连市小学生课外作业的现状说起.教育科学,1998年2月

作业被当作学校节省工作量的手段。讲授在课堂里进行，实践或应用部分推到家庭里进行。这样做，使学校能够把所有的时间集中于教学，家庭作业成了学校课程的延伸。这种做法的不良后果是降低了实践与练习在整个学习过程中的地位。另一种趋势是把作业当作管理的手段。上课若是不认真听，家庭作业就做不出。家庭作业成了教育学生自觉遵守纪律的工具。[①]

我国义务教育阶段学生每天家庭作业时间(1997 年)

时间＼年级	四年级(%)	六年级(%)	八年级(%)	九年级(%)
1 小时左右	34	16	8	5
2—3 小时	39	47	45	36
4—5 小时	19	28	38	45
超过 5 小时	8	9	9	14

加拿大的小学生在 9 岁之前是没有家庭作业的；10—11 岁每晚 30—45 分钟；12—13 岁每晚 1—1.5 小时；中学生平均每晚 1—2 小时的家庭作业。美国小学生每周家庭作业时间如下表所示。

美国小学生每周家庭作业时间(%)

类型＼时间	0 小时	少于 1 小时	1—2 小时	大于 2 小时
公立学校	5.5	45.5	26	23
私立学校	1.9	39.7	29.8	28.5

课外作业量偏大的国家主要有新加坡、伊朗、菲律宾、日本。这些国家中小学生作业时间更长，每天的作业量在 1 小时以上。在美国、英国、西班牙、土耳其、法国等欧美国家，中小学生平均每天做作

① 施良方，崔允漷主编.《教学理论：课堂教学的原理、策略与研究》. 华东师大出版社，1999 年 8 月，第 362 页

业的时间都比较短。

2000 年对某省会城市的三所小学(一所省重点，一所市重点和一所一般小学)和三所初级中学学生家庭作业情况做了调查，结果显示：两所重点小学的日平均家庭作业量超过 2 小时，其中五、六年级的日平均家庭作业量超过 3 小时；一般小学的日平均家庭作业量超过 1.5 小时，其中五、六年级的日平均家庭作业量超过 2.5 小时。三所初中的日平均家庭作业量为 4 小时，其中初三的日平均家庭作业量达 4.5 小时，个别毕业年级的日平均家庭作业量甚至超过 5 小时，且周末和节假日均被各种形式的“补课”占用。[①]

2004 年 8 月 16 日，北京市义务教育教学质量监控与评价研究发布“学生问卷”的结果表明：北京市中小学生作业负担仍然较重。多数学生平均每天花费 1 至 2 小时做学校作业，每周花半小时做家长布置的作业，半小时做课外辅导班的作业。

学生完成学校布置的家庭作业多数在 1 至 2 小时。在五年级 2781 个有效调查对象中，54%的学生平均每天花费 1 小时完成家庭作业，27%花费 1.5 小时，20%花费 2 小时以上。在八年级 3228 个有效调查对象中，45%的学生每天花费 1.5 至 2 小时做作业，37%的学生每天花费 1 至 1.5 小时做作业。每周出现不能按时完成家庭作业情况的学生有 20%左右。

每周要完成家长布置半小时以下额外作业的学生，五年级占 42%，八年级占 49%；半小时至 1 小时的，五年级占 38%，八年级占 25%；1 个半小时至 3 小时的，五年级占 12%，八年级占 16%；3 小时以上的，五年级占 5%，八年级占 7%。而每周要完成各类辅导班作业半小时以下的，五年级占 41%，八年级占 52%。

有关教育专家表示，这样的做作业时间表明学生负担仍有待于进一步减轻，尤其是小学生做作业时间太长，不利于身心健康。[②]

---

① 斯文. 关于中小学家庭作业问题的调查与思考. 安徽教育，2000. 1—2

② 引自：《北京日报》，2004 年 8 月 17 日

2007年上海市松江区对18所学校六年级、七年级和八年级三个年级学生的家庭作业情况作了一次调查。调查共收回有效问卷1687份，其中六年级571份，七年级670份，八年级446份；男生838人，女生849人。

调查结果显示：三个年级有95%以上的学生反映自己每天有三门以上的学科布置作业，其中语文、数学、外语占80%以上。八年级四门以上（以四门为主）布置家庭作业的占74.2%。通常情况下，学生完成家庭作业使用时间最多的学科在六年级和七年级是语文，在八年级是数学。三个年级学生在0.5小时以内完成一门学科作业的占52.70%。其中六年级这一比例最低，占48.0%。三个年级学生能在1小时内完成一门学科作业的占91.50%。

三个年级学生希望每天完成一门学科家庭作业的时间为0.5小时以内的占74.70%，希望每天完成一门学科家庭作业的时间为0.5～1小时的占20.9%，两者合计为95.60%。从大多数学生的角度看，学生每天完成一门学科家庭作业的时间应控制在0.5小时以内。

六年级每天完成所有学科家庭作业所需要时间在1小时以内的占14.3%；七年级每天完成所有学科家庭作业所需时间在1.5小时以内的学生占50.90%，八年级占35.90%。

根据《关于切实减轻中小学生过重课业负担的若干意见》（沪府办[2004]45号），六年级家庭作业应控制在1小时以内，七、八年级家庭作业应控制在1.5小时以内。可以看出，这与学生的期望基本一致，而学生完成家庭作业的时间与文件规定还有很大差距。[①]

事实上，早在1993年，原国家教委3号文件《关于减轻义务教育阶段学生过重课业负担、全面提高教育质量的指示》就指出：作业的分量和难度要适当。小学一年级一般不留书面家庭作业，二、三年

---

① 上海市松江区初中副校长研修班．初中学生家庭作业有效性现状及改进策略．现代教学，2008．1—2

级每日课外作业量不超过 30 分钟，四年级不超过 45 分钟，五、六年级不超过 1 小时，初中各年级不超过 1.5 小时。各地也都出台过类似的文件，例如，2005 年 2 月浙江省教育厅《关于减轻中小学生过重课业负担的若干意见》：小学一、二年级一律不布置课外作业，小学三、四、五、六年级学生的课外作业量（按学业程度中等学生完成时间计算）不超过 30 分钟，初中学生的课外作业量不超过 60 分钟，高中生的课外作业量不超过 90 分钟。

上海市静安区教育行政部门在进入新世纪以来一直在研究并跟踪调查中小学生的作业负担，采取切实可行的举措努力减轻学生的作业负担，提高学生的学习质量和生活质量。下面是 2009 年 1 月的调查数据，括号内数据的调查时间是 2007 年 11 月（数据由上海市静安区教育学院王俊山提供），这里所指作业是学生全部课外作业总量，其中数学作业约占到总量的四分之一到三分之一。

本次被调查的对象：小学为三年级和五年级学生，中学为七年级和九年级学生。此次调查的小学生共 3510 人，其中三年级共 1779 人，五年级共 1727 人，有效问卷 3506 份；中学七年级 2171 人，九年级 2139 人，有效问卷 4310 份。

在小学生中，1 小时左右可以完成学校作业的占 37.5%（40.4%），1—2 小时以内可以完成的占 32.3%（23.2%），2 小时以上完成的占 30.2%（36.4%），没有超过 3 小时的情形。在中学生中，1 小时左右可以完成学校作业的占 18.7%，1—2 小时以内可以完成的占 34%，2—3 小时完成的占 29.2%，九年级有个别学生需要 3 小时以上完成。

小学生认为学校作业很多的占 10.6%，适中的占 58%，较少的占 5.5%，很少的占 5.5%。中学生认为学校作业很多的占 14.9%，适中的占 45.6%，较少的占 2.9%，很少的占 1.8%。

小学生感觉学校作业很难的占 3.3%，较难的占 16.3%，一般的占 61.3%，较轻松的占 13.1%，很轻松的占 6%。中学生感觉学校作业很难的占 3.9%，较难的占 20.7%，一般的占 65.9%，较轻松的

占 6.8%，很轻松的占 2.7%。

小学生感觉作业负担很累的占 9.8%，较累的占 19%，感觉一般的占 43.7%，感觉较轻松的占 16.9%，感觉很轻松的占 10.7%。中学生感觉作业负担很累的占 12.0%，较累的占 27.9%，感觉一般的占 44.2%，感觉较轻松的占 11.9%，感觉很轻松的占 10.7%。

从上面列出的这些调查数据，我们看到，从总体上看，我国中小学生的课外作业量是偏重的但是呈下降趋势，特别是上海市静安区对学生作业现状持续的关注和加强科学指导，教师布置作业的量已经得到有效控制，作业的质也得到很大改善，约三分之二学生对作业负担的感觉已经比较适中，继续努力下去，达到国家教育部门的要求完全是可以做到的。

（二）一个学校的案例

以上是 20 多年来区域性的大面积调查结果，下面再具体看一所初级中学的数学作业情况。

在 2009 年 1 月第一学期期末，对学校全体学生进行了关于数学作业的问卷调查，以下是对初三学生调查的统计结果节选（上海市培明中学敖金昱提供）：

1. 对于老师布置的数学作业，你每天的完成时间大约是：		
A. 30 分钟内完成		13.19%
B. 30—60 分钟完成		59.03%
C. 1 小时以上		27.78%
2. 你通常在什么时间完成作业？		
A. 学校完成		7.64%
B. 20:00 以前		25.00%
C. 22:00 时前		45.14%
D. 22:00 时后		16.67%
E. 第二天早上		5.56%

（续　表）

3. 你觉得目前数学整体作业量是？		
A. 偏大		11.11%
B. 适中		81.94%
C. 偏小		6.94%
4. 数学作业用时多的原因是：		
A. 自己动作慢		45.77%
B. 上课没有听懂		19.72%
C. 作业练习多		20.42%
D. 其他		14.08%
5. 你认为作业多的原因是：		
A. 自己课后补充的		37.59%
B. 老师要我做的		39.72%
C. 家长要我做的		22.70%
6. 你认为老师布置数学作业的难易程度是：		
A. 简单		3.47%
B. 一般		68.06%
C. 较难		25.69%
D. 很难		2.78%
7. 对于老师布置的数学作业选自：		
A. 练习册		17.69%
B. 教辅		18.37%
C. 自编		0.68%
D. 以上兼有		63.27%
8. 老师对家庭作业的批改：		
A. 老师全部批改		47.95%

（续　表）

B. 老师部分批改		47.26%
C. 老师不批改		0.68%
D. 学生批改部分		4.11%
9. 你完成数学作业的态度：		
A. 认真完成		62.24%
B. 有时不完成		33.57%
C. 经常不完成		4.20%
10. 你平时数学作业的正确率如何？		
A. 80%以上		32.17%
B. 60%—80%		60.84%
C. 60%以上		6.99%
11. 你对待数学中错题的态度：		
A. 整理成错题集		12.16%
B. 订正		83.78%
C. 不订正		4.05%
12. 你通常以哪种形式完成家庭作业？		
A. 独立完成		77.70%
B. 和同学讨论完成		18.24%
C. 家长辅导完成		0.68%
D. 参考答案完成		3.38%
13. 当你完成家庭作业遇到困难时：		
A. 辅导完成		14.57%
B. 与同学讨论		50.33%
C. 独立完成		27.81%
D. 放弃不做		7.28%

（续　表）

14. 如果你不能完成家庭作业，主要是因为：		
A. 作业太多		33.33%
B. 作业太难		46.94%
C. 没兴趣		11.56%
D. 其他		8.16%

从上述调查统计结果中可以看出：81.94%的学生认为数学的作业量适中，77.70%的学生是独立完成作业。无论是数学作业的作业量，还是作业难度都是适中的，教师布置的作业也是经过精心设计的，数学作业的设计、布置与批改等环节已经得到很大改善。但是，学生的数学作业现状还有一些不尽如人意之处，从以上的统计结果和日常教学实践中我们发现：极少部分学生不能认真完成数学作业，一些学生对于略有难度的题目缺乏独立探索的精神。

第二节　数学作业的意义

清代教育家颜元说过："讲之功有限，习之功无已。"在数学教学过程中，教师不仅要重视在课堂上进行知识的传授，更要重视"习行之功"。数学作业与数学教学的其他环节有着同等重要的作用。

刘佛年先生在 1978 年就指出：培养学生解决问题的能力，是做作业的主要目的。通过做习题，学生应该学会遇到问题时从哪里着手去解决，了解为什么要用这个办法，能不能设想其他的解决办法，以及遇到不同类型的问题时如何运用不同的方法，为什么会出现这样那样的错误，等等。他进一步建议：习题要有一定的数量，要包括各种典型的类型，但最重要的是如何通过这一定数量的习题，引导学生逐步自觉地掌握解决问题的方法。掌握了方法以后，遇到没有

做过的题目，也能得心应手，左右逢源。[①]

一、对数学作业的认识

作业一词由来已久，但是在不同的场合使用其意义不同，《辞海》认为，作业是为完成生产学习等方面的既定任务而进行的活动。[②] 这是比较广义的作业定义，与我们所说的学校作业意义不同。

（一）作业的涵义

作业是“教师给学生布置的功课”[③]，是学校教学工作的一个有机组成部分。学生的作业通常有两种：一种是课堂内在教师的直接指导下进行的，叫课堂作业或称课内作业；另一种是在课外进行的，一般称为课外作业或家庭作业。[④] 还有为了特定需要而设计给学生完成的作业，称为功能性作业。

《教育百科全书》(1999) 认为，作业是学生为完成学习的既定任务而进行的活动。学生作业的目的在于巩固和消化所学知识，并使知识转化为技能技巧。它对于培养学生的独立工作能力与习惯，发展学生的智力与才能具有重要的意义。《中国大百科全书·教育卷》认为，作业仅指课外作业，所以表述为“也称家庭作业，学生根据教师的要求，在上课以外的时间独立进行的学习活动”，是“教学组织形式之一”。作业的功能主要有两个方面：一是对学生而言，作业是课堂学习内容的巩固和运用，体现了学习的过程，是针对课堂教学的实际，能充分针对当堂或一单元内的重点和难点知识，充分显现课堂教学中三维目标的落实，达到使学生强化和巩固课堂所学知识和技能，培养和提高实际运用能力的目的；二是对教师而言，作业是检验课堂教学效果的手段，是有效调整和改善教学内容、教学方

---

① 金一鸣等编. 刘佛年教育文选. 华东师大出版社，1999 年 10 月，第 172 页

② 辞海编撰委员会.《辞海》(教育心理分册). 上海辞书出版社，1999 年 9 月

③ 中国社科院语言研究所词典编辑室. 现代汉语词典(修订本)，第 3 版. 商务印书馆，1998 年，第 1686 页

④ 田万海主编. 数学教育学. 浙江教育出版社，1992 年 9 月，第 283 页

法的基本依据之一。[①]

学校布置的数学作业是学生完成数学学科学习任务的重要内容和手段，做作业是学生在教师的指导下对所学数学知识有目的有步骤地巩固知识、理解概念与应用理论的学习活动，是形成学生各种知识技能、提升学生数学思维能力的基本途径，作业的完成情况是教师对学生学习状态进行评价的基本依据之一，教师通过学生作业的完成情况可以反馈并调整自己的教学。

为了提高作业的质量，教师必须明确设计作业的目的，精心选配和布置习题与问题，对学生的课堂作业及时处理，对课外作业及时批改和讲评。学校、教师和学生都要对作业进行有效的管理。

（二）国内外对作业的认识

在国外，作业问题研究是比较活跃的研究领域。随着教学改革的不断深入，作业问题已引起了我国教育工作者的兴趣，并取得了一些成果。

1. 国外

早在17世纪的欧洲，夸美纽斯在他的著作《大教学论》中就已经对课外作业的重要性和安排方法作了精辟论述，指出："所教科目若不常有适当的反复和练习，教育便不能达到彻底之境界。"[②]他要求教师讲完新课后让学生复述所讲内容，要求学生把所学的知识再教给别人，通过实际应用把知识巩固在记忆里。

19世纪对学校教育实践影响最大的德国教育家赫尔巴特在他的《教育学讲授纲要》中的第二百五十八条指出："整个数学教学的教育价值主要取决于教学对学生的整个思维与知识范围影响有多深。这首先使我们想到，我们应当要求学生发挥主动性，而不是单纯地讲授。数学作业是必要的，但必须使学生知道人们通过数学能解决多少问题。有时候应当布置书面的数学论文，不过作业必须相

---

① 赵才欣.以有效性为导向建立作业新体系.现代教学，2008.1—2

② 张宝昆，王仁虎.外国教育文献，2004年，第5卷第4期，第33页

当容易，不要强迫学生接受太多的作业，作业量应以学生能轻松地完成为宜。”①

前苏联教育家 B. Φ. 沙塔洛夫主张编两类练习题集，第一类集子中的全部习题，所有学生都有能力完成，第二类集子中的习题则专为那些对该门功课有特殊兴趣的学生编，其难度完全足以满足优等生的求知欲。②

对新中国教育产生过巨大影响的前苏联教育家凯洛夫指出“家庭作业是教学工作的有机组成部分。这种作业从根本上具有独立作业的方法来巩固学生的知识，并使学生的技能和熟练技巧完善化的使命”③。凯洛夫对于获得练习效率的条件提出一般要求，这些要求在今天看来仍有指导意义。获得练习效率的第一个和最重要的条件是学生的自觉性；获得练习效率的第二个条件是学生要具有旨在坚定地掌握某种熟练技巧的贯彻目的的精神；获得练习效率的第三个条件是学生在练习过程中的坚定的注意力；获得练习效率的第四个条件是练习的系统性；获得练习效率的第五个条件是练习的多样性；获得练习效率的第六个条件是对于练习的经常复习；获得练习效率的第七个条件是正确分配时间。④

美国密歇根州立大学珍妮特·阿勒蔓和基尔·布尔菲认为，教师应该“将家庭作业重新界定为能够弥补课堂学习之不足的课外学习机会”，为使家庭作业变得既为孩子们力所能及又有助于孩子们的学习，他们对教师提出如下建议：①所布置的家庭作业应该帮助学生了解一定的课程思想。②所布置的家庭作业必须难易适当，既需要学生费些脑筋又不至于使之感到困惑或灰心。③尽量为学生

---

① [德]赫尔巴特著，李其龙译. 普通教育学教育学讲授纲要. 浙江教育出版社，2002年4月，第351页

② 转引自：刘光会. 新课程背景下普通高中数学作业的有效性研究. 华东师范大学，硕士学位论文，2007年10月

③ 凯洛夫. 实用教学技术. 教育科学出版社，1994年，第67页

④ 凯洛夫著，沈颖等译. 教育学(上). 人民教育出版社，1951年12月第二次修订原版，第192—194页

提供一些使之顺利完成家庭作业的背景知识或材料。④权衡一下布置的家庭作业对学生的好处与需要学生花费的时间和精力是否成正比例。但信息反馈是否及时，评价方式是否合理，和教学质量的提高又是怎样的关系呢？以前，许多心理学家对此作过大量的研究，迈耶等人曾对小学生、中学生和大学生对教师评价涵义的理解进行过比较研究，发现赞扬的评价和中性的评价对小学生、中学生和大学生的影响是不同的。[①]

在作业意义问题上，以美国教育问题专家哈里斯·库柏(Harris Cooper)教授的研究为代表，他从1986年开始至1989年对100多份有关家庭作业的研究进行分析，他在大规模调查的基础上对家庭作业的历史及有效性进行了研究，并发现了家庭作业的许多正面功效。他指出：家庭作业显然对学习内容的记忆和理解具有直接的作用；其次，能提高学习技能，改善学生对学校的态度，能培养独立性和责任心；最后，可以使家长参与学校教育的过程。[②]

但是，他又认为，家庭作业的负面效应却更为明显，只注重量而不注重质的家庭作业的危害更大：它会压垮学生，并使他们感到厌烦；它会使得学生不能利用放学后的时间去从事更为主动的追求，并导致他们为按时完成作业而设法寻求捷径（如抄袭或作弊）；它还会助长家长对其子女学习的干涉。库柏在检视其对家庭作业与学业成就的关系的研究时发现，家庭作业对不同年级的学生具有不同的影响：在高中，家庭作业可实质性提高学生的学习成绩；在初中对学生的学习成绩的提高只有高中的一半；在小学，尤其是小学低年级，家庭作业对学生学习成绩没有明显的影响。[③]

---

① 转引自：程高学. 初中数学作业布置及批改研究. 西北师范大学，硕士学位论文，2006年11月

② 段鸿、高正玲. 教学论应重视学生作业问题研究. 固原师专学报(社会科学)，1999年第2期

③ 转引自：斯文. 关于中小学家庭作业问题的调查与思考. 安徽教育，2000.1—2

2. 国内

江苏省杨彩凤、王之华同志(1995)做了“关于数学回家作业量的控制实验研究”得出结论:课外作业并不是配置得越多越好。[①] 北京市通州区对作业内容设计改革做了试验,表明:作业设计在符合学生自身认识规律和愿望的情况下,一定能够激发学生的学习兴趣、调动学生学习的积极性和主动性,从而提高学生理解知识和运用知识的能力;作业的内容和形式的改革是否奏效,依赖于课堂教学结构和方法的改进,作业信息的反馈又促进了课堂教学方法的改革。[②]

如何改进作业批改方式,各地都进行了各种方式的实验,重庆市唐绍友的研究认为:适度让学生参与批改作业是培养自觉能力的有效途径之一。[③] 上海市青浦县的蒋嘉辛、潘本元 1986 年通过实验证明,对学生作业采用轮流面批的措施,有利于提高学习成绩;采用面批与鼓励相结合的措施,则效果更大。[④] 江苏省樊亚东对作业批改中教师的评语与学生的回应作了有意义的尝试,认为这是一对一的书面交流,形同私人信件,因此更易触及心灵深处。[⑤]

二、数学作业的内容要求

作业的问题归根结底是作业内容的问题,做什么作业是作业问题的核心。

(一) 作业内容的原则要求

作业内容的选取应从数学学科的知识要求和学生学习的实际

---

① 杨彩凤等.关于数学回家作业量的控制的实验研究.江苏教育研究,1995(1),第5—8页

② 王文生.小学中年级数学作业改革实验报告.教育科学研究,1995年1月

③ 唐绍友.从一次调查看让学生批改作业.数学教育学报,1998年8月

④ 田云兰.谈小学生家庭作业的布置与批改.教学与管理,2003(8),第23页

⑤ 樊亚东.心中的远方在这里启航(续)——数学作业批改实录与断想.中学数学月刊,2009年8月

情况出发考虑。

1. 重视基础性

作业的内容要符合教学要求，所选的作业要有启发性、典型性，有助于学生对所学知识的巩固和加深，重点应放在基础知识的掌握和基本技能的培养上。在选择作业时应重视对当天所学基本概念的熟悉和基本技能的训练，应更多地从学生能否顺利完成的角度选择作业内容。作业不应普遍太难，否则会挫伤学生学习的积极性，对学习产生畏难情绪。基本知识和技能题应在作业的内容中占有相当的比例，能力的提高要有一个循序渐进的过程。

2. 强调针对性

作业应根据学生学习的实际状况而选定。课上的信息和上一次作业反馈的情况都是布置本次作业的依据。现在教辅材料很多，切忌不加选择地布置某本材料上的相应章节内容。再好的教辅材料也不可能适应所有学校的学生，教师在布置作业时应加以选择。

教师在布置作业时不能盲目攀比，要从学生实际学习水平出发，循序渐进，逐步达标；要考虑学生完成作业所需的时间，这一点十分重要。

3. 尊重差异性

作业的形式要多样化，充分利用学生已有的学习资源。教师在设计作业时，应照顾学生学习的差异性，既要考虑优秀生学习的需要，又要考虑学困生学习的积极性和学习水平达到课标要求。作业内容应更多地增加选择性和开放性。

学生中将来从事数学研究的是很少的一部分，上大学后继续学习数学的是大部分，还有一部分学生将来会很少用到数学专业概念，他们需要的是基本数学素养——忘掉具体数学内容后数学给人带来的影响。

4. 体现核心性

作业的内容应围绕课程的核心内容展开，应选择典型习题，避免偏、怪问题，淡化冷僻的技巧，重视数学一般方法。新课程标准强

调数学的本质，突出数学的主干，注重过程，强化理解知识的来龙去脉，要求学生体会并掌握数学的基本思想。在作业的选择上，教师要围绕着实现实施数学教育的根本意义、养成学生用数学基本观点看问题的习惯而展开。

（二）教师布置作业的注意事项

教师在布置和指导学生课外作业时要注意以下几个方面：

1. 作业内容和思想方法与当天所学或者与教师在教学中的要求相一致。对学生做作业的要求也要前后一致。

2. 作业份量要适当，难易要适度。要按本门学科上课和自习时间的比例来确定作业的份量。作业难易以学生的一般水平为准，对成绩好、学习能力强的学生可适当增加一些有一定难度的参考作业供选择。各科教师应相互协调作业的份量、防止学生的忙闲不均。

3. 教师对布置的作业要提出明确的要求、具体规定完成的时间。对作业中的难点、疑点可进行必要的指导，决不能代替学生的思考。还要争取家长的配合，为学生课外作业提供必需的条件。

为了及时掌握学生学习的情况，教师对学生的课外作业应进行经常性的检查和批改。批改的方式可以有多种多样：全面批改、重点批改、轮流批改、当面批改、师生共同讨论批改、指导学生互相批改等，各种方式都应从实效出发去考虑。批改和检查的结果，除了通过评语和个别谈话对学生加以具体指导外，对一些有代表性的问题要对全班学生进行分析讲解。①

学生完成课外作业的效果和上课的质量有着直接的关系，如果上课这个环节没有抓好，就会影响课外作业的完成。

三、数学作业的功能

作业是课堂学习内容的巩固与内化，也是补充与完善教学内容的有效手段。作业作为教与学的交汇点，它的设计与实施是实现

---

① 南京师大教育系编. 教育学. 人民教育出版社，1984 年 8 月，第 480 页

"减负""增效"的关键环节之一。

（一）训练学生独立学习能力的功能

华罗庚先生生前多次提到：独立学习能力是搞科学研究的最重要的能力。新课程倡导学生自主学习，无论是课内还是课外，在作业环节学生都应有更多的自主空间和时间，做课后作业时还可以利用自主学习资源。

学生通过对作业内容的独立思考、作业时间的独立分配和安排以及作业质量的自我检查等活动，可以使独立学习的能力得到很好的训练。苏霍姆林斯基早就指出："常有这样的情况：一个学生上了七八年学，他没有独立地解答过任何一道应用题（无论是在学校里还是在家里）。遇到这种现象，就要向教师提出建议，不要过分迷恋于集体形式的作业，不要造成一种一切顺利的表面现象，要把学生独立的、个别的作业做为学习数学的基础"。"为了使学生独立作业，经常挑选好几种习题方案——一般地提出四种方案。前三种难度不同的方案是从《教学大纲》的要求出发的。第四种方案则包含着某些大纲范围的因素，这类习题是给能力强的、有天才的学生做的，同时也是为了培养出新的天才学生而设计的。作业题的分化能引起学生的强烈兴趣，发挥他们的才能，激起学生的竞赛精神，并且能帮助教师在作业过程中研究和评价学生的知识。学生们都竭力要完成较难的方案，并且想用独创的方法来解答习题。学生经常先把较容易的方案解答出来，再着手做较复杂的方案，经过克服困难而完成作业"。这条经验很值得我们借鉴。[①] 我们应重视学生是怎样完成作业的，设计适合学生独立解决问题的作业方案，鼓励学生独立完成作业。

（二）促进学生发展的功能

新知识从开始学习到真正掌握需要有一个逐步消化的过程，适

---

① 转引自：王永，余文森. 教学与发展，《迎接21世纪挑战的数学教育》. 人民教育出版社，1999年9月，第136页

当的作业是巩固所学知识的重要手段。在“做作业”中理解，在理解中掌握，在“做作业”中获得技能、熟练技能、体会和理解方法，获得发展。

作业是学生获得发展的一种方式，“做作业”是知识和能力的深化与发展，作业的发展功能，赋予学生自主作业的权利，通过作业，为学生提供自我表现、自我反思的时空，为教师提供了解学生发展进程的途径。

经常按时完成规定的作业不仅可以培养学生积极思考问题、科学利用时间的良好学习习惯，而且在培养学生勤学苦练、努力克服困难的意志品质方面也都具有重要的意义。

夸美纽斯在《大教学论》中说：一个活泼的心理如果不去忙着有用的事情，它便会去忙着无用的、稀奇的、有害的事情；正如田地愈肥沃，蒺藜便愈茂盛一样，一个绝顶聪明的心理如果不去布下智慧与德行的种子，它便会充满着幻异的概念。一个活泼的心理如果没有正经的事情可做，它便会被无益的、稀奇的和有害的思想所困扰，会成为自己毁灭的原因。[①]

因为只有练习使人精巧，而我们又充满着一种意向，要使人通晓一切事物，擅长一切，从而适宜于一切工作，我们要求所有班级的学生都要实际练习。我们是教育人，而不是教育鹦鹉，所以他们就应该经常受理智的明亮的光芒所指导。在这一周做什么，这一月做什么，这一学季做什么。在做练习的时候，勤勉的、知识掌握得牢靠的和听话的学生应该获得表扬，而落后的学生应该受到责备。[②]

尽管这里所说的练习，与今天的作业有所不同，但是其意义是相通的。通过作业给学生的发展方向不断地予以指导。学生也在一天、一周、一月、一学期这样不断地做作业的过程中成长。

作业是学生展现自己聪明才智的窗口之一，通过作业学生向教

---

① 张焕庭主编.西方资产阶级教育论著选.人民教育出版社，1979年9月，第5页

② 同上书，第48—50页

师展现了自己的解法，通过课后学生对作业的互相讨论，学生向同伴展现了自己的实力，在不断的接触中逐渐确立自我的学科信心，知识和能力也得到发展。

只有把学生的学习情感、学习兴趣、质疑能力、创新意识、动手动脑解决问题的能力等融入数学作业中，设计多种形式的数学作业，让数学作业丰富多彩，让作业真正为学生的发展服务，使学生数学学习的活动成为一个生动、活泼和富有个性的过程，学生才会喜欢数学，并成为数学学习的主人。

（三）反馈和交流信息的功能

作业的所有环节的实质，是信息的展现和传递。一方面，它集中地反馈了学生在巩固和加深对所学知识、技能、方法与思想的理解与掌握水平方面的基本信息；另一方面，老师通过对作业的批改，可从中获取学生学习情况的信息，为后续教学活动的进行提供必要的支持。学生独立完成或在独立思考后讨论完成的作业，能够反映学生对所学内容的理解程度，对所学方法的掌握程度。作业还能体现学生思维的规范情况，作业反馈得到的信息可提高教师课堂教学的针对性。

作业还是师生个别交流的有效平台。学生可通过作业向老师提出自己困惑的问题，教师可通过作业肯定、赞扬学生的优秀解法，可很具体地指出学生学习中需要加强之处、所存在的个性化问题。

作业是巩固课堂知识、发展情绪情感、提高学业成绩的一种重要途径。优化的数学作业设置应当贯穿于学生学习活动的全过程，为提高其学习质量提供最基础的保障，应当成为教与学双方相互沟通的良好信息通道。

《高中数学课程标准（实验）》在评价建议中指出："要重视学生做数学的过程，充分发挥数学作业在学生评价中的作用。"作业的批改和讲评是进行教学不可或缺的环节，作为信息反馈的渠道、师生交流的平台的作业，也是对学生评价的重要一环。

（四）补充和完善学习内容的功能

课堂只有有限的几十分钟，为了更有效地实施课堂教学，教师可把一些预备内容或者整理性的内容让学生在学习之前先完成，把一些学生能够独立完成的教学内容编制成某种类型的作业，让学生在课内或者课外完成，在完成作业的过程中补充了学习内容，也完善了知识结构。

有些探究性问题需要较长的时间和充分的讨论，放在课堂上让学生讨论、发现，很不合适，教师可在课上通过对部分问题的探讨，让学生领略了探究方法之后，再留下部分问题让学生课后思考、讨论、研究，来完成全部的解答。这样教师没有越俎代庖，既给学生留下了学习空间，又帮助学生体会到了研究方法，同时能让学生在学习中不断地提高独立解决问题的能力。

第三节　数学作业的类型

要充分发挥作业的功能，还要注意区分作业的类型，平衡好作业的数量和质量。

一、不同分类的作业

划分作业分类的角度很多，使作业的类型非常丰富。1.按照完成作业的空间分有课内作业、课外作业；2.按照作业的完成和反馈时间分有短期作业（含即时、短期作业）和长期作业；3.按照作业的特定功能分有：巩固概念型、理解命题型、训练方法型、复习巩固型、知识纠错型、方法总结型、思想方法型和实践探究型作业等。由于划分的标准不同，分类的办法也不同。本书把这些具有特定功能的作业，依据教学的习惯，按照不同课型划分为概念课作业、命题课作业、习题课作业、复习课作业；按照不同训练要求分为知识掌握与技能训练型作业、优化认知结构型作业、领悟思想方法型作业、问题探

究型作业。每一种分类下，如复习课作业，根据习题作业涉及的知识范围和学生做作业的时间来分，又可以细分为：课后复习作业、单元复习作业和总复习作业。

（一）课内作业与课外作业

课内作业和课外作业是相辅相成的。许多作业应该在课内进行，在课内解答了一些典型习题以后，师生应该在一起分析、讨论使用的方法。这样做了才可以合理安排课外作业的份量，加快做课外作业的速度。[①]

1. 课内作业

课内作业，是指教师根据教学要求设计的需要学生独立解决或者师生共同解决的例题、练习题或者口头回答的问题，是课堂教学的组成部分，也称课堂练习。

下列是学生在做课堂练习时可能发生的动作、行为：[②]

（1）开始做作业后，学生还问教师作业的要求。

（2）学生问老师自己是否做对了（这样行吗？）。

（3）学生向教师询问更多的建议（还可以查什么资料？）。

（4）学生问教师的评价（你觉得这个结论如何？）。

（5）学生告诉老师自己做了什么、为什么这样做（展示）。

（6）学生完成作业后，问老师下一步干什么。

课内作业通常是伴随着课堂教学的进展而布置给学生的，主要在课内完成，有时需要延续到课外。本章第一节最先呈现的数学特级教师的作业设计案例就属此类。

2. 课外作业

课外作业，比较广义的是指学生课后开展的无教师指导的学习活动。[③] 狭义的是指根据教师要求，学生在课外时间独立进行的学

---

① 金一鸣等编. 刘佛年教育文选. 华东师大出版社，1999 年 10 月，第 172 页

② Thomas L. Good, Jere E. Brophy 著，陶志琼等译. 透视课堂. 中国轻工业出版社，2002 年 1 月，第 465 页

③ 《简明国际教育百科全书. 教学(下)》. 教育科学出版社，1991 年 6 月

习活动。在教学活动总量中占有一定比例。它是课堂教学的延伸，有助于巩固和完善学生在课内学到的知识、技能，并培养学生的独立学习能力和学习习惯。[①] 日常教学中我们所说的作业就是这种类型的课外作业，也称家庭作业。

田万海先生对课外作业进一步作出如下分类。[②]

根据学生对教材熟悉程度的不同，课外作业中包括的数学内容可取材于已经学过的课题（复习课题）、正在讲授的课题（现时课题），或者尚未讲授的课题（生疏课题）。这样，对学生的课外作业可以做出分类，以明确不同类型的作业具有不同的功能。

（1）所有的课题都是生疏课题

向学生布置生疏课题的目的，是要让学生通过预习，先熟悉下次课内要讲的新概念和新原理，在课堂讲授之前进行独立思考，以便能顺利地进入新课题的课堂学习。

（2）所有的课题都是现时课题

只包括现时课题的作业，一般是在讲过新知识之后紧接着进行的，这是一种经常性的课外作业，是学生课外作业的主体。

现时课题的作业一般包括两部分。第一部分是基本练习题，目的在于使学生切实理解与掌握数学基础知识，初步获得运用这些知识的基本技能。这部分作业应紧紧围绕新课的内容，选择一些最能突出地说明新概念和新原理的实质和直接运用新知识进行解答的基本题目。第二部分是熟练技能技巧的练习题，目的在于使学生巩固所学得知识，并形成一定的技能技巧。

（3）所有的课题都是复习课题

全是复习课题的课外作业，通常是为了让学生准备测验、考试，或者是为新课作必要的准备。通过这种作业，使学生进一步巩固和深化所学的知识，发展学生灵活运用数学知识分析问题和解决问题

---

① 顾明远主编.《教育大辞典》(第 1 卷).上海教育出版社，1989 年 9 月

② 田万海.数学教育学.浙江教育出版社，1992 年 9 月，第 284—285 页

的能力。担负这一任务的是复习题、综合题或实践性作业，应该选择内容较深、涉及的知识面较广、富于变化、有一定的灵活性和技巧性的题目。

(4) 兼有复习课题、现时课题和生疏课题

把复习题、现时课题和生疏课题组合起来的课外作业，目的在于强调知识的连贯性，强调各课题之间的关系以及数学知识体系的组织结构。许多有经验的教师，总是在当天布置的课外作业中，把前后的教学内容联系起来。通过这种课外作业，学生既复习、强化了已学的知识，掌握了现时的材料，又按某种预先组织好的模式准备材料。这种将复习、现时和生疏课题综合于一体的课外作业，能帮助学生将各种数学对象进行有效调节，吸收到他们的认知结构中去。

施良方、崔允漷主编的《教学理论：课堂教学的原理、策略与研究》一书，对家庭作业(课外作业)也做了较为详细的研究。[①]

(1) 家庭作业与学生学业成绩

家庭作业是否能提高学生的学业成绩？这个问题并不是那么容易回答的，而且常常会被误答了。美国早期开展的一些研究证实正规布置的家庭作业提高了学业成绩，然而研究人员极少支持保留家庭作业，主要是考虑低收入家庭的学生碰到的问题。这种意见使得美国学校只有较少的家庭作业，而更偏重校内学习。

在实践中，有些教师往往只注意家庭作业的量，而不顾质的方面。于是布置的家庭作业往往都是复习习题，以巩固课堂所学的知识。成绩好的学生能够很好地独立完成家庭作业，但是一些成绩差的学生不明白课堂上讲解的内容，家庭作业于是就成为比复习和练习更为困难的功课，他们非但不能从家庭作业中得到好处，反而因此拉大了与好学生的距离。因此，对于不同的学生要有不同的作

---

① 施良方，崔允漷主编. 教学理论：课堂教学的原理、策略与研究. 华东师大出版社，1999 年 8 月，第 360—363 页

业，以使家庭作业能最大限度地发挥作用。

（2）家庭作业的布置量

应该布置多少家庭作业这是个价值问题，在不同的文化背景下回答也会不同。教育工作者和社会上的人们要决定与其他活动（如运动、音乐、工作）相比，学生应该花多少时间在家庭作业上。研究表明，从国际背景来看，北美的中学生并没有做很多家庭作业。

（3）家庭作业的类型

根据家庭作业的不同目的，可以把家庭作业分成三种不同的类型：

第一种是练习型家庭作业。这是最简单的一种类型，用来帮助学生掌握一些技能。布置这类作业应注意两个问题：一是学生有可能在练习一些错误；二是这些作业很容易被别的学生抄袭。研究表明，若练习型的家庭作业能与先前的学习材料相联系，那么它是有效的。

第二种是准备型家庭作业。这类作业使学生能从随后的课程中得到最大的益处。为了能发挥作用，这类作业的内容必须要紧接着在课堂中得到扩展。例如，如果布置学生在课堂前准备一篇阅读材料，但教师只是在课上重复了一遍而已，做了这份家庭作业的学生就会感到厌倦，而没有做作业的学生却能从中得到必要的信息。这类家庭作业能使更多的课堂时间运用于课堂讨论。

第三种是扩展型家庭作业和创造型家庭作业。这类作业主要用来考查学生是否能把熟知的技能和概念运用于新的情景。创造型的家庭作业比扩展型家庭作业更进一步，需要学生在回答的过程中整合一些技能和概念。

根据对我国义务教育阶段学生的课外作业形式的调查，教师布置的作业大多是书面习题与阅读教科书，而较少布置诸如观察、制作、实验、读课外书、查资料、社会调查这一类的实践性作业。对学生进行前一天课外作业形式的调查发现，除个别项目外，实践性作业的比例小学更少。从本章第一节所呈现的高一数学作业案例中，

我们也可发现，教师布置的多是知识理解与综合运用类型的课外作业。

（二）短期作业和长期作业

短期作业，包括即时布置即时完成的作业，如：课堂练习，我们教师每天布置的作业，还有平时布置的多数家庭作业，当天布置当天完成或次日完成的作业，周末布置的练习，需要利用休息日来完成的作业，这些都是短期作业。

短期作业便于教师的检查反馈。布置作业的内容一般称为习题，在许多情况下，教师在课堂上提供了典范解法，学生的练习题适合于学习事实和技巧，在这种情况下，所布置的习题为实现教学目标，揭示了问题类别，提供了使用算法的实践和有关数学过程的训练，因此，对于学生解题来说，这是需要做的主要工作。

然而，教师不应当认为学生在使用推敲过的典范解法或者算法，解决了这些常规问题后便掌握了“问题解决”。提到问题解决，就需要明晰什么是问题？

问题是一种状态，在这种状态下，个人或集体要求去完成一个任务，对于这个任务他们没有易于理解的、没有解答方法是完全确定的法则。随着人们数学知识的增长，原先是问题的东西，现在却可能变成常规的习题。对于一个人可能是问题的东西，对于另一个人可能只不过是习题。对学生而言，问题必须要学生本人认为是一个问题，因而问题必须满足下述三个特性：①

1. 接受性：本人接受这个问题。这里，各人对问题的接受是有着各自的状况的，包括内部的动因和外部的动因，也可能仅仅产生于经受解答问题的欢乐愿望。

2. 障碍性：本人的最初解答尝试没有结果。他习惯上对问题的反应和处理问题的模式失败。

3. 探究性：从(1)中所说的个人状况迫使本人去探究新的处理

---

① 张奠宙等著．数学教育学．江西教育出版社，1991年11月，第226页

方法。

所谓有问题，是指一个人面临着某种他所不认识的东西，而对于这种东西他又不能仅仅应用某种典范的解法去解答。因为，一个问题一旦可以使用以前学会的算法轻易地解答出来，那么它就不再被认为是一个问题了。

通常布置给学生的小课题研究就是一种问题。目前，进行小课题研究已经成为国内外教学中作业布置的一个重要趋势。在美国，小课题称为 project，在美国教学材料中，有很多 project，学生非常有兴趣地完成这些小课题。在完成小课题时，学生往往进行合作交流。在我国，小课题的研究也受到极大的重视，成为改善学生学习方式的一种重要方法。

学生进行这些小课题学习有以下几个特点：首先，要有一个比较大的问题，这个问题对于学生来说具备进行探索的余地和思考的空间。第二，学生进行小课题的学习是一种研究性的学习，过程是非常重要的。学生经历一个收集信息、处理信息和得出结论的过程，在此过程中学会一些探索的方法。第三，学生具有一定的自主性，教师起到引导的作用。第四，对小课题的评估主要不是看结果，而是注重过程。第五，小课题的呈现主要通过学生对实物和具体模型的操作，其内容结合身边的事物。第六，小课题的学习过程对于学生来说是有趣的。小课题可以在课堂中通过合作学习方式完成，也可以通过作业形式布置，即要求学生经过一段时间的工作完成这一作业。长作业是客体学习在课外的延伸。[①]

例如，上海市长宁区自 2009 年 9 月 1 日起，小学所有年级均不布置书面回家作业，取而代之的是主题式“长作业设计”。比如，在长宁区愚一小学，教师布置了一道题，要求学生了解“家庭水电煤一周使用情况”，并设计一份节能环保的可行性方案。这样的“长作

① 饶玲主编.课程与教学论.中国时代经济出版社，2004 年 5 月，第 245 页

业”让学生在实际生活中学会应用数学知识，达到学以致用。[①]

长作业的宗旨是开发学生课外学习潜能，从而不断提高学生的综合素养。

这里所说的长作业即长期作业，是围绕某个主题来展开的，并不是书本知识的简单再现，而是运用课本上所学知识的结果，是一种类似科学研究的方式去获取知识和应用知识的学习方式。广义的理解：它是指学生在教师指导下，从自己的兴趣出发在自然、社会和生活中选择和确定专题进行研究，并在研究过程中主动地收集资料、获取知识，师生互动地完成主题任务的一种体验活动。长期作业包括布置后需要较长时间才能够完成的作业，也包括只有布置时间而没有完成时间或者完成时间可根据个人情况而定的作业。因此，长期作业更有利于学生意志力、耐力的培养。有时几十个学生哪怕只有一个人去完成，这位同学将来可能就是数学家或者从事数理工作，因此也是有价值的。通常包括长期课题和大部分短期课题、小课题。实践性的家庭作业，例如“研究大型居民居住区内垃圾箱（存放点）的合理配置（分布）问题”，通常是长期作业。

长期作业使教学从课内拓展到课外，从校内拓展到校外，从只知道布置家庭作业到进行长期作业实际操作；学生从被动完成作业到主动收集、设计作业，在这一过程中学生可获得较好的发展。

例如，要求学生对所学知识进行归纳整理，包括知识点、思想方法、题型结构等以周为单位，每周小结，一个月或者一个学期把整理内容作为作业进行适当检查，就形成了一种形式的长期作业。

案例：

初一开始，学习幂的运算、单项式、多项式以及整式的运算，出

① 苏军．提升学生上学“幸福感”．文汇报，2009年8月31日

现了字母以及字母运算。数学中字母的出现是算术走向代数、数学走向符号化的重要标志。字母运算与数的运算有一致性，也有根本性的区别。此时布置长作业：请注意字母运算与数字运算有什么相同和什么不同，收集、查询相关资料，并整理成文。

完成这类作业需要学生去选题、写作、修改、找资料等等，这是一个庞大的系统工程。我们在实际操作过程中的难点是教师如何指导和督促，指导督促过多，对学生的发挥是种禁锢，指导督促过少就会放任，效果都会受到影响。

（三）功能性作业

不同功能种类的作业是作业类型中内涵最为丰富的一种，多样化的作业类型，可以丰富学生多种学习经历，激发学生的学习潜能和学习热情。

1. 不同课型作业

概念课作业。

概念课作业是指围绕数学概念的内涵和外延，帮助学生正确理解概念的本质的作业类型。理解一个新的概念不可能仅仅依靠对概念本身的解释和说明就能完成，常常需要变换概念的表达和陈述方式，设计有层次的问题和练习，学生在对这些问题和练习的解答过程中加深对概念的理解。常常还需要列举一些容易混淆的与概念内涵不符的事例让学生辨析，认识概念的外延。

命题课作业。

我们将数学公理、定理、法则、公式等内容的学习，称为命题学习。命题课作业是指围绕数学命题的获得、证明和应用各个环节，帮助学生多角度地理解和掌握命题的作业类型。命题的获得可以通过设计具体的数学事实，在这些数学事实的基础上抽象概括出命题，而命题证明获得的本身就可以成为命题作业，围绕命题应用需要设计不同层次的作业类型。要注意命题应用的深度和广度以课程标准为依据。

习题课作业。

习题课是数学教学的基本课型之一，它的主要作用是使学生进一步巩固所学的数学基础知识，加深与扩大对基础知识应用范围的认识，并学会熟练地运用基础知识，使学生熟练掌握数学在解决实际问题中所必须的技能和技巧，培养和发展学生的数学思维能力。习题课作业是指围绕习题课的设置目的，帮助学生巩固、熟练乃至于灵活应用所学基础知识的作业类型。它常常还有对学习内容的补充和完善功能。

复习课作业。

人类认识事物具有渐进性和阶段性的特点。在不断深化的学习进程中，经常需要根据实际情况适当停顿一些时间，对一个阶段乃至于一个时期的学习内容进行整理、系统化和结构化。复习课作业，是指围绕复习的目的，帮助学生回顾、记忆、整理以及总结所学内容的作业类型。复习课作业通常是阶梯型由易到难，或者模块化围绕核心知识展开。例如，在每一个章节结束后给学生布置作业：在本章中你学了哪些概念、结论和方法？在本章学习过程中有什么需要注意的问题？

2. 不同训练要求作业

知识掌握与技能训练型作业。

数学知识与技能的学习是数学学习中最重要、最基础的一环。知识掌握与技能训练型作业，是指针对当前所学知识与技能的要求，帮助学生理解、掌握或者应用这些知识与技能的作业类型。知识掌握与技能训练型作业一般是由简单逐步过渡到复杂的呈现方式，为了达到巩固的目的，同一知识与技能需要设计角度不同的变式训练。

优化认知结构型作业。

每个学生学习过程中都会形成自己的认知结构，作为教学要设法优化学生的认知结构。优化认知结构型作业，是指针对学生所学知识的结构特点，对不同学习内容进行适当整合，打通不同模块之

间的联系，帮助学生完善自己的认知结构的作业类型。

领悟思想方法型作业。

数学思想方法是数学的灵魂，只有领悟了数学思想方法，才能说真正掌握了数学内容。领悟思想方法型作业，是为了帮助学生有层次地理解相关思想方法，以思想方法为主线的作业类型。

问题探究型作业。

培养数学探究能力是要经历长期的过程，问题探究型作业是为了帮助学生提高问题探究水平的作业类型。在基础教育阶段，应提倡充满生机、生动活泼的科学探究活动，开放题、实践题、探索题等具有激励性和挑战性的问题能够促进学生更好地发展。探究型问题也越来越受到评价者的重视，各地的中考和高考已经不同程度地出现了这类问题，培养数学探究能力的作业类型理应受到教师的重视。

二、对作业分类的意义

对不同作业类型的描述，了解作业的不同分类，有助于我们教师合理分配作业，控制作业数量，提高作业质量。

（一）丰富布置作业的类型

作业类型的多样性，可以带动学生学习的积极性。

学生在完成作业的过程中可以运用课堂中所学的知识和技能，从而达到练习和巩固的目的。学生通过作业可以检查对知识的掌握程度、技能水平、解题速度、解决问题能力等。了解了作业类型的多样性后，教师在设计作业时，可以有意识地设计符合需要的更有针对性的作业。

例如，小学数学“带余数除法”教学内容，“建立余数概念”是概念学习，而“发现余数与除数的规律关系”是命题学习，不仅涉及余数概念，也涉及除数、被除数和商之间的关系，而且是基于余数概念基础之上的。学生不但要发现规律，还涉及对规律的理解和操作熟练程度。所以，这个任务的实施对教师有难度，很容易停留在

表面。[①] 教学容易强调知识结果的获得，较少关注数学过程，因此忽视了所教数学主题的本质属性。“余数”概念的建立不能停留于赋予名称，而应强调其数学化的过程。需要设计概念课作业与命题课作业相结合的作业形式，还可以设计观察探究性的问题即探究性作业。

新课程的教学目标是三维目标，不仅重视让学生获得数学知识与技能，还关注学生学习的过程与方法，注重让学生在思维能力、情感态度与价值观等多方面得到进步和发展。

在平常的数学教学中，在安排课堂内外的作业时，要努力做到形式的多样性。

1. 课内作业与课外作业相结合。课内作业注重基础性、典型性和示范性，课外作业提倡与课内学习具有连续性。另外，由于课外作业完成时间和空间的弹性，可以弥补课内作业受时间和空间的限制的不足，因此可以把研究性的或者需要合作讨论完成的作业作为课外作业。例如“查找与学习内容相关知识的资料，并写出自己的认识。”是一份弹性较大又具有一定开放性的作业。

2. 基础性和选择性相结合。新课程方案对课程内容提出了“基础性、选择性、时代性”的要求，这种要求不应仅体现在课程内容的设置上，也应该体现在课程实施和作业中。

3. 不同课型作业与不同训练要求作业相结合。作业的大部分内容应是熟悉基本概念、形成基本技能的习题，这类虽然难度不高，但对掌握基础知识效用非常好。作业也应有一定量的探究性问题，以利于学生研究能力、问题解决能力、创新能力的形成。

（二）兼顾作业的数量和质量

学生练习练什么、练多少、难度如何、层次把握、新旧衔接等等，都需要认真思考。如果课堂上讲的内容在课后作业中找不到一点影子，上课讲了两种类型的例题，结果练习中一点也没有，那么练习

---

① 杨玉东，李士锜. 用本原性数学问题驱动课堂教学——一项改进教师数学教学的行动研究. 数学教育学报，2005 年 2 月

的有效性就会有问题。如果学生练习的量，他无论如何努力也是完不成的，就不会有时间很好地去思考、去总结，效果也是不好的。太容易或者太难都不能起到巩固成果、启迪思维、提高能力的作用。需要控制作业的数量，提高作业的质量。

为了控制作业的数量，在布置作业时可增加一些可选择性，关注不同类型作业的不同功用。例如，高中学习直线方程的一次作业布置，提供了 8 道题，其中 4 道是基本的和难度适中的，有 4 道是要求较高的以及综合性较强的，要求学生至少完成 5 道，认为太简单或者太难的都可以不做，结果教师可以从学生选题的比例，了解学生目前的学习情况，使教学更有针对性，不同水平层次的学生也都能充分施展自己的才华，对于学生不会做的题，教师也可以要求学生读题并简单写出自己的解题障碍。而且很多学生虽然难度大的题目不会做，但能够主动问老师或同学，促进了自主学习。

为了提高作业的质量，需要精心设计不同类型的作业。有针对性地帮助学生是提高作业质量的有效途径之一，对不同类型的作业可采用不同的方法帮助。波利亚在《怎样解题》中多次强调，教师最重要的任务之一是帮助学生，应当有效地、不露痕迹地帮助学生。"教师对学生的帮助应当不多不少"，"不显眼地帮助学生"，"应该顺其自然"。因此，教师需要选择适当的方法批改和讲评所布置的作业。

案例：

如何提高作业质量？[①]

要想进一步提高作业的质量，还要做好以下几件事：一题多解，一题多想；对习题加以比较进行分类；及时查看发回的作业，正确对待作业中的错误；习题要做得工整、简明、条理清楚等等。

① 来源：杭州四季青中学网，2007 年 7 月 12 日

1. 一题多解，从中选择最佳解法

每做一道题，都要认真想一想，这道习题用了哪些概念和原理？解题的基本思路和方法是什么？除了这种解法以外，还有没有别的解法？这些解法中哪一种最简捷、最恰当？

2. 一题多想，探索解题的各种可能性

例如，有这样一道题：

"梯形的对角线分梯形为四个三角形，如果梯形两平行边所对的三角形的面积为 P^2 和 Q^2，则这个梯形的面积为：$(P+Q)^2$。"

当用三角方法或几何方法做完这道题后，可以进一步去想：

如果其他条件不变，梯形变为任意四边形，会有什么样的结果呢？（结果是 $S \geqslant (P+Q)^2$）

它的逆命题能不能成立呢？结果是能成立。

如果时间允许，每做一道作业题，都坚持一题多解，一题多想，多动脑筋，把题钻研得深些，从表面看，题目做得少了，做得慢了，但实际上却是题做多了，快了，要认识到其中的辩证关系。

3. 比较归类，以少胜多

习题之多，有"题海"之称，怎么办呢？应该看到题目之间是有联系又有区别的。围绕一个专题做了相当数量的习题之后，应当认真把做过的题目整理一下。

想一想这道题目在知识上属于哪一类？在解题的思路和解题方法上属于哪一类？这些题目彼此之间有什么相似之处？又有什么不同之处？经过一番比较，就可以把这些题目加以分类，使自己的眼界一下子从个别上升到一般，再见到同类题目时，就比较容易纳入自己头脑中的分类系统，使问题得到迅速解决。

当然，在比较、归纳、分类的时候，一定要在自己做了相当数量的习题后再进行，要自己来"加工"。

4. 及时查看发回的作业，正确对待作业中的错误。

有些同学对老师批改后发回的作业看也不看一眼，就往抽屉里一塞；有的同学只注意打了几个"√"，记了多少分，这是不对的。应

认真对待发回的作业，特别要认真对待作业中的错误。首先要分析错误的性质，是概念问题、思路问题、形式和步骤问题，还是粗心大意造成的。通过分析就能发现自己常犯错误的类型，找到学习中的薄弱环节。其次，要记录错误的典型例子，分析错在哪里，原因是什么，应该如何更正。这样分析得越透彻，就越能防患于未然。第三，结合作业中的错误，要勤于思考，肯于发问，积极和老师同学切磋，有意磨炼自己的思维能力。

5. 围绕学习的中心内容做课外习题

一位优秀学生在总结自己学习中走过的弯路时说："听人说应该多做习题，我就不顾课本，也不重视书上的习题，而是花大量的时间去做课外习题，以致费力不讨好，常常上课听不懂，总复习时很紧张……为什么呢？因为做的课外习题脱离了当时学习的中心内容，脱离了老师安排的学习进度。"从一些优秀学生的经验来看，他们是在完成了当天学习任务之后，用空闲的时间，做一些与当天学习内容相关的课外习题，从不另搞一套，这样做就直接促进了课内的学习。

6. 作业要工整、简明、条理清楚

平时做作业，应当养成良好的学习习惯。工整、简明、条理清楚的作业反映了一个学生一丝不苟的学习态度。

工整、简明、条理清楚的作业，可以避免出现不必要的差错，有利于检查时查找；复习时看起来也方便；老师批阅起来也快得多。

7. 作业要保存好

按照知识系统定期将作业分门别类地保存起来，放进卷宗或"公文袋"中，到复习时，可随手拿来参看。作业是学生平时辛勤劳动的成果，不注意保存好，就等于把自己的劳动果实白白地丢掉了。

本章小结

本章对我国数学作业的现状进行了分析，得出结论：数学作业

在老师的教学中所占比重很高，老师批改作业方法比较固定，学生缺乏自己对数学进行思考整理的时间，布置作业和批改作业的质量都还有很大的提高空间。各地教育行政部门和教育研究机构对包括学生作业在内的课业负担问题很重视，积极采取切实可行的措施，以减轻学生过重的作业负担，提高学生的学习和生活质量。从总体上对数学作业的意义、内容要求以及作业的类型及其功能作了概要的阐述。

问题讨论

1. 对你个人或者某一位老师一个阶段的数学作业布置与批改情况进行跟踪调查，看一看能发现什么结论？

2. 对“学生做数学作业的意义有多大？”这个问题你持有怎样的观点？

3. 关于作业的类型，有人认为有口头作业和书面作业之分，你认为数学作业是否需要口头作业呢？

第二章 数学作业的设计

第一节　数学作业设计的意义

教学是一种有明确目的性的认知活动，其有效性是每个教师必须追求的。在教学的实施过程中，提高教学各个环节的有效性是实现教学整体有效性的基础。教学是一根链条，备课、上课、作业、辅导和评价等基本环节一个不能少，哪个环节脱链都会直接降低教学的有效性，导致学生学业负担过重。

就教学中的作业环节，目前存在如下现象。

当前，教师在教学实施过程中对作业效度的轻视几乎是个"致命伤"。从根据学生学习的实际状况精选有针对性的作业，到认真逐一批改作业，再到发现学生的认知差异实施个别辅导，这个过程实际上是对课堂教学效果进行反馈——矫正——改进的循环过程。这个循环既能让教师清晰地了解学生现有的学习程度，又能为下一轮的教学找到扎实的新起点。青浦上世纪 80 年代的教改实验，就是强调抓反馈，但是在当前的教学过程中，常常出现一种现象：教师缺乏对学生学习状况的分析，又不加选择地压给学生过量的作业，以为只要多做练习就能提高质量，作业之后既不批也不改，只让学生自己对答案，耐心的"面批"不见了，有效的"订正"没有了，取而代之的是无穷无尽的、千人一面的"一课一练"，这样的教学能有效吗？

高效率作业环节的缺失把教学的连贯过程“拦腰斩断”，反馈失去效用，辅导又不跟进，学生学习成了“夹生饭”，而考试和下一轮教学又按部就班地叠加上去，这样，学生的负担能不重吗？[①]

作业是教学中的一个基本环节，也是学生巩固课堂知识的重要环节，但在很多学校“问题最大”：普遍存在的低效率作业把教学过程“拦腰斩断”，使反馈失去效用，辅导无法跟进，学生这一轮知识还没有掌握好，考试和下一轮教学又来了，学习成了“夹生饭”，导致学生花了大量时间进行的却是无效学习。[②]

因此，加强教学过程的系统性，关注备课、上课、作业、辅导和评价等教学环节，实现教学环节的连贯和畅通，是切实提高课堂教学有效性的保证，这里作业环节举足轻重。

习题是中学数学课本中的重要组成部分，习题配备得好不好，直接影响到学生学习质量的高低，许多优秀中学数学教师的教学质量之所以高，一部分原因也是由于习题选择和处理得恰当。[③]

美国著名教育心理学家奥苏贝尔认为，数学学习的实质是：数学的语言或符号所代表的新知识与学习者认知结构中已有的适当知识建立非人为的实质性的联系。换言之，数学知识要融入到学习者已有的知识经验中形成一定的联系，这样的数学学习才是有意义的，所以，做数学作业在“理解语言或符号所代表的新知识”方面发挥着重要作用。

数学的一个显著特征是高度的抽象，这一特征决定了数学学习必须通过具体的数学作业才能深刻理解数学概念和原理、掌握数学方法。操作练习是反省抽象的基础。熟能生巧，“巧”应建立在熟练操作的稳固基础之上。数学作业最重要的目的在于让学生通过实

---

① 尹后庆. 在上海市推进课程改革加强教学工作会议上的讲话. 上海教育网，2007年8月22日

② 中国教育新闻网—中国教育报，2009年5月17日

③ 余元庆. 谈谈习题的配备与处理——介绍基本外国中学数学课本中的习题配备. 数学通报，1980年3月

际操作、思考，将新知识纳入自我认知结构，建构自己独特的数学知识结构，并植根于自己的实际操作经验中。

综上所述，数学作业设计和方式的不同对数学教学有效性有巨大影响，对学习数学具有重要的意义。数学作业是需要精心设计的，那么，数学作业设计需要解决什么样的具体问题呢？

一、数学课程改革深化的需要

数学课程改革呼唤数学作业设计。《上海市中小学数学课程标准》[①]在高中十到十二年级内容与要求中明确指出，“数学学习训练系统是教材的重要组成部分。这个系统中的训练内容部分，包括为形成数学概念或引出有关定理、法则、公式等而设置的问题情境；为指导学生理解、运用有关知识而安排的例题；为学生开展解题活动和参加数学实践而提供的各种训练等。”“数学学习训练是数学教学的一种基本活动，其目的是‘打好基础，促进发展，反馈教学’。数学习题是组织数学学习训练的主要载体，也是教材中最为有利于展现学生才能和创新能力的、最具活力的成分。”

高洪武在《对高中新课标教材习题设置的几点认识》中对新课标教材习题设置呈现的特点进行了分析：非常注重与现实周边生活的联系，使问题的呈现显得更加亲切、自然；开放型问题所占的分量加重，更加注重学生创造能力的培养；讲求循序渐进，同时也为后续知识的学习不时地埋下伏笔、作好铺垫；问题设置更加注重学生动手能力、实际操作能力的培养，首现数学模型的原背景回归问题；问题的设置给学生留有广阔的思维空间，给老师提供了很好的变式平台。[②]

因此，在课程改革不断深入的今天，作为数学学习训练系统最

---

① 上海市教育委员会编.上海市中小学数学课程标准.上海教育出版社，2004 年.本书后面简称为数学课程标准

② 人教网教学研究栏目：http://www.pep.com.cn/gzsx/jszx/jxyj/200609/t20060920_265587.htm

主要构成的学生数学作业，应根据学生当前学习和长远发展的需要，进行整体设计、系统安排，形成综合效应。这个作业训练系统中，要有重在数学知识的构建和巩固的基础性作业，还要有重在数学知识应用和创新的发展性作业。

学生减负需要对作业设计。当前，学生课业负担过重是一个不容质疑的事实，造成学生课业负担过重的一个重要原因是作业配置有很大的盲目性和随意性，具体表现在作业与学生水平、教学进度的匹配存在差距，离科学性和有效性还有相当的距离。如何避免那些机械、重复、乏味的低效作业，满足学生主体性、发展性的要求，充分调动学生作业的积极性，让他们在完成数学作业的过程中享受到学习数学、运用数学的快乐显得尤为重要。如何优化数学作业的设计，以适合全体学生，满足于知识基础不同、智力因素各异的每位学生的需要，赋予数学作业生命的色彩是一个重要的课题。

二、达成具体的学习目标的需要

在数学学习中，学生在学习、理解、运用具体的课本内容时都需要对应的数学作业实践活动。数学作业要以相应的课程标准为依据，以教材为基础紧扣教材内容，以问题为载体，以提高学生数学素质为核心，通过多种形式、不同层次、不同要求的问题，在帮助学生巩固课堂所学知识和加深理解教学内容的同时，着重培养学生分析和解决问题的能力，既注重基础知识的巩固，又强调基本能力的培养。

（一）促进数学概念理解的需要

“理解”是数学学习的首要任务，而习题训练与问题解答是促进理解的一种有效途径。

例如：函数的基本知识是高中数学的核心内容之一，函数是描述变化规律的重要数学模型，也是数学的基本概念，函数思想是研究问题的重要思想，用函数的观点研究问题是一种重要的观念。函数的概念及思想方法贯穿于高中数学课程的始终，渗透到数学的各

个领域。

为配合函数的概念教学内容，在练习与习题中可以分别从解析式和图象两方面对函数的概念设置判别问题，使学生根据已经学习的函数概念进行实际操作，即根据所学数学知识进行判断、运算、推理。例如，下面四组中函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一个函数的是 （　　）

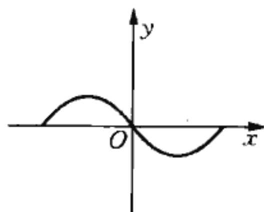
(A) $f(x)=|x|$, $g(x)=(\sqrt{x})^2$

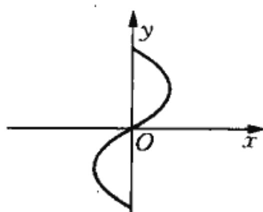
(B) $f(x)=2x$, $g(x)=\dfrac{2x^2}{x}$

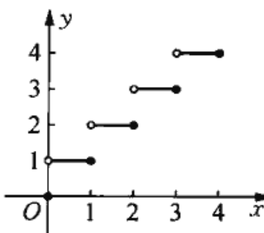
(C) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt[3]{x^3}$

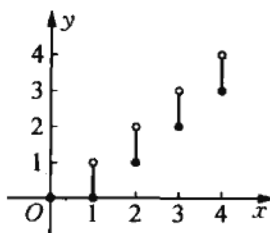
(D) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$

下列各图象中，哪些是函数的图象，哪些不是函数的图象？为什么？









例如，学生在学习同类项概念时，仅有概念描述“所含字母相同且相同字母的指数也相同的单项式叫做同类项”是远远不够的，必须配置以具体的作业才能帮助学生理解。以下是让学生达成理解同类项概念的作业设计：

试一试：下列各组单项式是不是同类项？并简单说明理由.

题　目	意　图
(1) x 与 $-2x$；	同类项与常数无关
(2) $2x^2$ 与 $2x^3$；	相同字母的指数不相同
(3) $3a^2$ 与 $4b^2$；	所含的字母不同
(4) $3x^2y$ 与 $2xy^2$；	相同字母的指数不相同
(5) $2ab^2$ 与 $-3b^2a$；	同类项与字母顺序无关
(6) 2^3 与 3^2。	常数也是同类项

从以上理解同类项的作业设计中，我们可以看出这样的设计意在促进学生深刻而牢固地掌握数学基础知识，这样的作业设计是使学生掌握知识与技能的最重要的手段，因此，数学作业设计是学生达成具体的学习目标的需要。

（二）促进数学思想方法形成的需要

数学学习的重要目标是形成数学思维能力，而数学思想方法的学习是提高数学思维能力的核心环节，这可以从数学思想方法在数学思维中的作用得到印证。数学思维一般取决于四个成份：数学思维的过程、数学思维的材料与结果、数学思维监控、数学思维品质，无论哪一个成份，数学思想方法均起到基础的统帅作用。

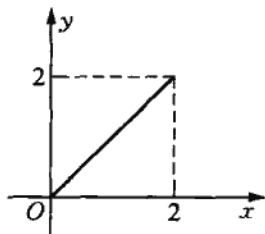
数学思维品质主要表现为思维的深刻性、敏捷性、批判性、灵活性和独创性，它是个人数学思维能力差异性的表现，也是发展数学思维能力的突破口。

数学思维的深刻性表现为善于洞察问题的本质，善于由此及彼地进行联想，善于去伪存真，善于拓广结论，概括总结一般规律。这一些表现正是数学思想方法的本质特征，所以数学思想方法的学习是培养数学思维深刻性的关键途径。数学思维的敏捷性、批判性、灵活性都是在数学思维的深刻性上发展起来的，它们的培养都依赖于主体对数学思想方法的透彻理解和运用，以此为基础方能在解决

问题中表现出上述品质。数学思维的独创性通常表现为能独立地发现问题、分析问题和解决问题，“新”是独创性思维的主要特征。大量的事实表明，数学上的发现、发明主要是方法上的创新，数学思想方法是数学发现、发明的关键和动力。在数学教育和数学学习中，再现数学的发现过程，揭示蕴含于知识中的数学思想方法是培养数学思维独创性的中心环节。

数学学习活动是一个以学生已有的数学认知结构为基础的“建构”过程，是一个积极、主动的数学思维活动的过程，它要求学生积极、主动地学习。数学思想方法是对数学知识本质特征的反映，它蕴含于数学基本知识的发展和应用的过程中，它是反复使用、长期思索的结果。因此，数学思想方法的形成需要通过学生主动完成相应的习题训练而获得。

例如，已知函数 $f(x)=x^2 \quad x\in(0,2)$，函数 $f(x)+g(x)$ 的图象如图所示，求函数 $y=g(x)$。



配备这样的习题，目的是通过学生自己的思考、观察、分析，理解图象中蕴含的信息，由“形”的特征得出“数”的结论。体会数与形之间美妙的关系，使学生能用自己的语言来正确表述自己的想法，在进行具体应用过程中解决相关的数学问题。

（三）促进情感态度价值观形成的需要

众所周知，数学在形成和发展人的科学态度和世界观、道德素养和个性特征方面具有其他学科不可替代的教育作用和意义。中科院院士王梓坤先生曾经说过：“数学的贡献在于对整个科学技术（尤其是高新技术）水平的推进与提高，对科技人才的培养和滋润，对经济建设的繁荣，对全体人民的科学思维与文化素质的哺育，这四方面的作用是巨大的，也是其他学科所不能全面比拟的。”美国数学家 M. 克莱因认为，“数学是一种精神，一种理性的精神。正是这种精神，激发、促进、鼓舞并驱使人类的思维得以运用到最完善的程

度；也正是这种精神，试图决定性地影响人类的物质、道德和社会生活，试图回答人类自身存在提出的问题，努力去理解和控制自然，尽力去探求和确立已经获得知识的最深刻和最完美的内涵。”

东西方仁人志士都强调了学科本身对人的培养和滋润，这种培养和滋润就是学科的德育功能所在，而且，这种功能是这门学科所特有的，是其他学科无法替代的。作为在数学学习中占重要地位的数学作业，理当发挥这种独特的育人功能，使学生通过数学作业得到情感态度价值观的体验。

事实上，数学教学的情感、态度、价值观目标是依赖于知识与技能、过程与方法目标的实现的。情感态度与价值观的形成离不开具体的知识与技能的学习，大量的事实表明，成功的知识与技能的掌握，美妙的数学解题成功的体验，能够持久引起学生积极的态度和对相关内容的兴趣。当然情感态度与价值观等方面的发展需要在数学知识与技能的学习过程中有意识地渗透，而不是可以自发产生或随着知识与技能的学习自然就形成的；而且，情感、态度、价值观的形成对知识与技能的学习产生深刻影响。

所以，设计能够激发学生好奇心和求知欲、有助于学生形成积极探索的态度和思考问题策略的数学作业，是培养学生积极的情感、态度、价值观的需要。

三、达成阶段性学习目标的需要

随着学生数学学习进程的推进，学生的数学知识、数学认知水平、解题策略和方法、问题分析能力和应用意识都在不断地发展。所以，数学教学必须充分考虑到学生上述各个因素的发展性，设置不同阶段、不同层次的教学目标与教学内容。同样地，数学作业设计也必须满足学生达成阶段性学习目标的需要。

例如，一元二次不等式的解法是用一元二次函数的图象及一元二次方程的判别式来求解集的，其学习目标是掌握一元二次不等式的解法并理解一元二次不等式、一元二次方程和一元二次函数之间

的关联。为使学生达成这一学习目标，高一习题册里配置了如下有关作业：[①]

题　　目	分布
1. 若关于 x 的二次方程 $2x^2+ax+1=0$ 无实数解，求实数 a 的取值范围。	习题 2.2 A 组第 9 题
2. 不等式 $ax^2-2x-3\geqslant 0$ 的解集是空集，求 a 的取值范围。	习题 2.2 B 组第 3 题
3. 当 k 取何值时，一元二次不等式 $2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$ 对于一切实数 x 都成立？	习题 2.2 B 组第 4 题
4. 若不等式 $2x^2-2(a-1)x+(a+3)>0$ 的解集是 $\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围。	复习题二 A 组第 7 题
5. 已知函数 $y=(m-1)x^2+(m-3)x+(m-1)$，m 取什么实数时，函数图象与 x 轴 (1) 没有公共点？ (2) 只有一个公共点？ (3) 有两个不同的公共点？	复习题二 A 组第 8 题
6. 已知关于 x 的不等式 $ax^2+3ax+a-2<0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，求 a 的取值范围。	总复习题 A 组第 7 题

本组作业虽分散分布于习题册的不同地方，但它们都是为达成同一个目标服务的，那就是帮助学生打通一元二次不等式、一元二次方程和一元二次函数之间的关联。如果我们再对照研究教材中的例题[②]：当 k 为何值时，关于 x 的一元二次不等式 $x^2+(k-1)x+4>0$ 的解集为 $(-\infty,+\infty)$？本例的解法为：关于 x 的不等式 $x^2+(k-1)x+4>0$ 的解集为 $(-\infty,+\infty)\Leftrightarrow f(x)=x^2+(k-1)x+4$ 的图象在 x 轴的上方 $\Leftrightarrow$ 开口向上的抛物线 $f(x)=x^2+(k-1)x+4$ 与 x 轴无交点 $\Leftrightarrow$ 方程 $x^2+(k-1)x+4=0$ 无实数根 $\Leftrightarrow \Delta=(k-1)^2-16<0$。从以上解题过程所蕴涵的学习要求来看，需要学

① 高级中学课本，《数学》(练习部分)高一年级第一学期．上海教育出版社，2006 年 8 月，第 13—15 页、23—24 页、49 页

② 高级中学课本，《数学》高一年级第一学期．上海教育出版社，2006 年 8 月，第 46 页

生在一元二次不等式、一元二次方程和一元二次函数之间进行灵活地转换，对思维的严谨性、流畅性有较高的要求。要达成这样的阶段目标，必须有对应的作业训练实践相匹配。

再如，上述教材高一数学第3章函数的基本性质4小节内容是一个整体，具有使学生建立比初中更抽象、更精细、更准确的函数概念，学会研究函数性质一般方法的整体目标，但每一小节又具有各自的阶段性目标，每一节课又具有非常具体的学习目标。因此，我们在设计作业时，应注意它的具体训练目标，切忌操之过急，以免偏离学生的认知水平。如，缺少对函数图象上升和下降的认识，就很难解决如下问题：判断函数 $f(x)=x^2-2x+3$ 在$[-2, 2]$的单调性，并写出它的单调区间；在不能证明如下问题："证明函数 $f(x)=\frac{2}{x}$ 在区间$(-\infty, 0)$上是减函数"的情况下，就很难解决下面的问题："已知 $a\neq 0$，试讨论函数 $f(x)=\frac{a}{1-x^2}$ 在区间$(0, 1)$上的单调性"，更不用说解决下面的问题了："已知 $f(x)$是定义在$(-1, 1)$上的奇函数，在区间$[0, 1)$上是减函数，且 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$，求实数 a 的取值范围。"

第二节　数学作业设计的基本原则

一、关于数学作业设计原则的有关论述

有关数学作业设计的基本原则，我们可以从近年来关于数学习题及其教学的研究中得到启发。

戴再平先生根据教学原则与编制数学题的特点对编制数学题本身应遵循的基本原则提出三点。[1]

① 戴再平著.数学习题理论.上海教育出版社，1993年

（1）目的性原则：数学题的形式、内容和难度应根据不同的教学目的设定，编制出的数学题本身也要受教学效果、质量的检验。为了让学生产生疑惑，继而刺激学生产生解决疑惑的动机，启迪学生的数学智巧，这不仅是编制数学题的出发点，也是编制数学题的归宿。

（2）科学性原则：数学题给人合理、严谨、清晰的感受，具体的标准是：有关的概念必须是被定义的；有关的记号必须是被阐明的；条件必须是充分的、不矛盾的；条件必须是独立的、最少的；叙述必须是清楚的；要求必须是可行的。对开放性题目，允许出现条件不足的情形。

（3）和谐美原则：数学题应该使学生得到美的陶冶，体现严谨、简洁和统一的数学美，激起学生追求真、善、美的愿望，培养学生学习数学的兴趣，引导学生探索数学王国的奥秘。

徐金梅在其学位论文中提出了设计数学习题的十一个原则：①

（1）就近取材原则，是指例题及习题的选择应以课本中的题目为基本素材。因为这些题目贴近教材和大纲，贴近学生实际，对其进行深入的挖掘，可防止学生舍近求远搞题海战术。

（2）目的性原则，是指所选的题目必须符合教学的目的要求，教师必须明确其在每一章、节中的作用。

（3）循序渐进原则，是指所选的题目应按照教材的体系，以及学生的知识结构，在难度上逐层深入，题型上从单一到综合，阶梯式上升，对不同的学生体现不同的要求。

（4）针对性原则，是指针对教材中的教学目标、重点、难点，以及教学中学生易错和掌握薄弱的知识点进行题目的选择，达到有的放矢。

（5）启发性原则，是指所选的题目能激发学生的学习兴趣，启发

---

① 徐金梅. 初中数学例题及习题教学之研究. 硕士学位论文，内蒙古师范大学，2007年6月

学生积极思考，开拓思路，活跃思维，有利于学生思维的发展。

(6) 开放性原则，是指所选的题目应具有开放性，使得不同学生的知识水平都能得到一定的发展和提高，都能参与到教学活动中，有利于学生主体意识的形成和思维、创造能力的培养。

(7) 实践性原则，是指所选的题目应体现数学知识在生产、生活中的广泛应用，突出反映数学“源于生活，服务生活”的特性，这样有利于培养学生解决实际问题的能力，增强解决实际问题的意识，使其切实体会到数学的应用价值。

(8) 多样性原则，是指所选的题目应在形式、内容和解法上力求多样化，要从不同的角度去运用某些基础知识和基本技能，适当选一些一题多解的题目或将题目进行变型、推广和引申，使学生广开思路。

(9) 适应性原则，是指教师应该在了解学生已有的知识基础和背景经验的基础上，在习题的数量、难易程度和提高解题技能等方面进行通盘考虑，选择适合学生实际水平的题目。

(10) 发展性原则，是指所选的题目应围绕发展思维、开发智力这一目的，选择那些包括科学方法运用、反映逻辑素养、培养创造力的题目。

(11) 贴近考试题型的原则，是指在平时的教学中适时地将考试信息通过例题及习题呈现给学生，使其在内容、形式上熟悉，心理上适应，增强自信心，减少对考试的恐惧感，从而正确认识考试的作用。

黄东兰在其学位论文中提出了习题精选的八条原则：①

(1) 就近取材原则，是指习题的选择应以课本中的题目为基本素材，选择具有代表性的题目作讲解和练习。因为这些习题贴近教材和大纲，贴近学生实际，能防止学生舍近求远搞题海战术，而且很

---

① 黄东兰. 中学数学习题教学理论与实践. 硕士学位论文，福建师范大学，2003 年 8 月

多题目学生已做过，所以具有很强的针对性，能查漏补缺。

（2）体现和归纳基本思路的原则。教师应选择具有一定代表性和普遍规律性的习题作为范例，用于帮助学生掌握解题的基本思路。

（3）体现巩固和应用知识的原则。巩固和应用已学知识是习题课的基本出发点和目标。

（4）体现专题性原则。教师在讲授某个重要的知识点或知识块后，应设置配套习题，以帮助学生及时巩固和强化。此原则常用于全面复习。

（5）体现层次性的原则。选择的习题在难度上应逐层深入，对不同的学生体现不同的要求。

（6）体现开放性的原则。选择的习题具有开放性，能培养学生探索性思维和创造能力。

（7）体现贴近考试要求的原则。将考试信息通过习题呈现给学生，使学生学习具有目的性，增强自信心。

（8）体现与社会、生活相联系的原则。习题的选择应体现数学知识在社会、生活中的广泛应用，突出反映数学"源于生活，服务生活"。

并指出以上几种原则，是相互联系和渗透的。在习题教学中，首先要在精选上下功夫，通过精讲和精练使教与学更有成效。

李茂瑞、段永君、陈玉华阐述的数学习题的配置原则有：目的性原则、针对性原则、循序渐进原则、实践性原则、优化原则、发展性原则、弱点揭示原则等。[①] 胡艳梅、赖邦城认为配置数学习题应遵循由浅入深的原则，以课本编排的习题为基础，按循序渐进的认知次序和思维发展规律，采取由个性到共性、由单方面到全面、由一法到多法、从特则到法则、由通常到超常的习题配置方法。[②]

---

① 李茂瑞，段永君，陈玉华. 试谈数学习题的配置原则. 山东教育，2002 年 6 月

② 胡艳梅，赖邦城. 配置数学习题的若干方法. 江西化工，2008 年 1 月

上海市二期课改高中数学训练系统研制课题组认为，从训练系统的整体功能发挥来讲，在数学习题设计时要遵循：①

(1) 普适性原则：树立面向全体学生学习数学的基础观，注重培养学生基本的能力和方法。

(2) 渐进性原则：遵循认知发展的客观规律，关注学生生理和心理的发展过程以及学习效果的累积和上升过程，突出学生的主体地位。

(3) 发展性原则：建立科学的实践发展观，围绕有利于学生可持续、和谐发展设置习题，处理好数学知识螺旋上升和数学实践应用开放性、研究性和综合性的关系。选题在"精"不在"多"，让学生在"悟"与"活"上下工夫。

从各块数学学习内容的习题来讲，普遍采用的设计思路包含以下四块结构：

(1) 练习题：练习题应与课本例题相对应，有利于促进基础内容的理解和基本技能的掌握。练习题立足于课堂内能够解决。

(2) 习题：每单元设置习题，且分 A、B 组。A 组问题侧重于基础知识、基本技能与基本的通性通法的训练，面向全体学生，是所有高中生经过努力都能够理解并予以解决的问题。B 组问题侧重于知识的应用理解与能力的提升(包括思想方法)，有一点延伸，但所应用的知识点不宜过多。

(3) 每章复习题：每章复习题分 A、B 组，题型多样，控制难度，适当配制应用性问题，但要注意应用问题的背景和结构。

(4) 学期总复习题：总复习题分 A、B 组，内容、题型选配上要注意分到节，要贯穿本学期的知识。从新的角度强调每章的核心内容与重点思想方法，达到课程标准相应的要求。

综上所述，数学习题的编制和选择或者说数学作业的设计，已

---

① 上海市二期课改高中数学训练系统研制课题组．上海市二期课改《高中数学课本·练习部分》编制说明．数学教学，2006 年 10 月

经引起广大数学教育研究者和一线教师的广泛关注。就数学作业的设计原则而言，归纳起来不外乎两个要点：一是设计的数学作业要与所学的数学内容有高度关联，所谓就近取材原则、目的性原则、针对性原则、实践性原则、多样性原则都可以归纳到这一要点；二是设计的数学作业要与学生的实际相一致，为做到这一点，在作业设计时要考虑作业的循序渐进、启发性、开放性、多样性、适应性和发展性。

涂荣豹先生提出数学教育研究是由一般教育理论演绎数学教育规律和由数学教育自身特殊问题提取数学教育规律的双向建构；数学教育作为学科教育不但要遵循"教与学对应"原则，还应该遵循"教与数学对应"的原则[①]。数学教育应遵循的"教与学对应"、"教与数学对应"的双向对应原则也是数学作业设计的基本原则。在数学作业这个层面，这两条基本原则具体反映就是数学作业设计应遵循"与学习内容相一致的原则"和"与学习水平相一致的原则"。

二、与学习内容相一致的原则

与学习内容相一致，做作业才有很好的效率；与学习内容不一致，就会达不到作业的目的。

（一）案例呈现与分析

1. 案例呈现

这样的场景经常在校园出现：每天一大早，几个学生早早来到学校，早来的目的就是抓紧把作业抄好；到了交作业的时间，有几位同学迟迟不肯交，原因要么就是没有完成，要么就是"没带"（有相当一部分学生是没有做）；还有一部分学生交上来的作业有大片的空白；除此之外，还有极个别学生总是不交作业。调查显示，每天能独立、按时完成教师布置作业的学生占总人数的 79.8%。问题更加严重的是作业的订正，作业出现错误，及时订正的仅占总人数的 29%；

---

① 涂荣豹. 论数学教育研究的规范性. 数学教育学报，2003 年 11 月

在教师督促下才订正的占总人数的65.9%，剩下的学生几乎从来不订正作业。即使订正了作业，还有一部分学生仍然做错，需要二次订正甚至三次订正才行。由于作业是学生巩固知识、教师教学反馈的重要一环，作业质量直接影响到教学质量。所以，作为一名教师，对于以上的种种现象经常感到非常苦恼。那么，造成这种现象的原因是什么？

2. 案例分析

首先我们问学生以下几个问题：(1)为什么不做作业？(2)为什么抄作业？(3)作业为什么那么多空白？(4)为什么不认真订正？学生的回答主要有以下几种：

(1) 上课没有听懂，或基础差导致作业不会做。对于那些学习成绩较差的学生来讲，这是他们的主要原因。这部分学生学习基础较差，接受知识的速度比较慢，大部分都没有良好的学习习惯，他们无力独立完成作业，所以这部分学生要么不做作业，要么抄作业。在听老师讲解时，他们又往往心不在焉，把注意力放在抄写正确答案上，而不是理解上。对他们来讲订正只是一种任务，只要完成了即可，所以订正的效果很差，错误率很高。

(2) 作业的能力要求太高、太难。有时学生上课都能听懂，但还是不会做作业。主要是题目太难，要求太高，与上课内容不匹配，面对这些问题，学生感到束手无策，花费大量的时间都不能解决，自信心丧失。他们往往求助于一些学习较好的同学，而这种求助，在时间紧迫的情况下，又往往会变成抄作业。

(3) 作业的量太多。学生普遍感到数学作业太多，需要花费大量的时间完成，休息时间少，经常没有足够的时间订正。在这种情况下，学习较好的学生，即使能够独立完成作业，由于怕来不及完成，他们也会选择抄作业。

(4) 不喜欢学习，不想做作业。这部分学生只占学生总数的极少部分，他们的学习态度很不端正，家庭教育往往也存在问题，要让他们按时完成作业是件很困难的事。

（二）案例启示

上述调查说明，学生在作业中存在的问题，除了课堂教学因素、学生自身因素之外，教师作业的设计不合理也是一个重要因素。存在的问题主要有：

1. 作业内容与学生的学习水平不匹配。教师的作业布置，没有考虑到学习基础较为薄弱的学生。教师在布置作业时缺乏对这部分学生的关心。还有，教师没有根据上课的内容和实际效果，及时调节作业的内容、形式、容量。如果上课的内容较难，学生掌握的情况不好，作业就要相应调整。

2. 作业内容与学习的内容不匹配。一般说来，作业内容以对教师所教内容的练习、巩固为主要目的，它的内容与难度应该与上课所学的内容一致（可以有点拓展内容）。大部分内容对于学生来讲应该比较容易，有难度的问题的比例应该适当控制，如果存在大量比较困难的问题，学生经过努力也不能完成，为了按时交作业，就只能抄。另外，作业太容易，对部分学习成绩良好的学生来讲没有吸引力，也会发生作业抄袭的现象。

3. 作业量超出学生的承受能力。一般来说，每天的数学作业量，应该控制在半小时以内（对中等学习程度的水平而言）。超过这个标准就会有相当一部分学生的作业不能独立完成。由于学生每天不止完成一门数学作业，学生面对的是语、数、外等多种作业，如果作业的总量很大，学生就会在各个作业之间进行先后选择，对学生完成数学作业也存在影响。

4. 作业布置形式单一，缺乏灵活性，对学生没有吸引力。在布置做业时，学生处于完全被动的状态，做什么怎么做，都由教师决定，学生没有自主权或选择权。导致学生对作业的兴趣不高，完成作业的积极性低。

所以，作业的设计是非常重要的。就像肖川博士讲："作业是教师精心准备的送给孩子们的礼物，它为孩子综合运用知识、发展和表现个人天赋提供机会，使教学的影响延续到全部的生活之中。"合

理而科学的数学作业，能充分发挥作业的职能，减轻学生的作业负担，让学生更好地掌握知识和技能，使学生在思维、能力等多方面得到长足的发展，并形成对数学学习良好的态度，达到全面实现数学教育目标、提高教育教学质量的目的。

作业内容应该与上课内容相匹配，绝大部分是学生可以独立完成的。原则上应该“讲什么，做什么”。对于较难的问题，可以布置与上课内容一致的问题，使学生有可以模仿的对象，甚至原题。例如，在初一年级刚刚接触平面几何说理（初二讲证明）时，由于学生对几何说理的思路和步骤还不熟悉，即使对一些简单的问题也最好先给学生讲解好思路、步骤，再作为作业让学生完成。再例如，在一元二次方程的根与系数的关系这一节，讲解书上“想一想”的题：已知方程 $x^2+3x-2=0$，不解出方程，怎样利用根与系数的关系，求作一个一元二次方程，使它的根分别是已知方程的各根的 2 倍？在课上让学生明确解这类题的方法、步骤之后，马上布置一道类似的题做作业。例如：已知方程 $x^2-2x-1=0$，利用根与系数的关系求一个一元二次方程，使它的根是原方程各根的①平方；②负倒数。通过这样的练习，让学生进一步熟悉解题步骤，同时也确保学生知识点的掌握、作业的完成。（以上案例由上海市华东模范中学徐鑫老师提供）

三、与学习水平相一致的原则

学生学习水平客观上存在的差异，要求我们设计作业时，要考虑不同群体对作业的需求。

（一）个性化作业

1. 设计分层作业。学生的学习风格差异、学习程度差异呼唤着数学作业的个性化设计，在班级授课制下，对于不同学习层次的学生，设计分层作业是一个相对而言较为理想的选择。分层作业可以有指定型和自选型。指定型即指定不同的学生做不同的作业，比如对于那些基础较差的学生，教师可以根据他们的水平单独

布置作业，这些作业应该是非常基础和简单的，量比较少，学生可以独立完成。对于个别学习优秀的学生，教师可以布置一些启发思维的拓展性作业。这样做的好处是作业针对性强，学生积极性高，容易完成，缺点是教师工作量大，不管是布置和批改都要花费大量时间和精力。自选型作业，也就是教师提供不同的作业作为选择材料，设计多梯级、多层次的作业，给学生留有自主选择的空间，让他们各取所需，自主选择作业的数量与难度。比如：提供 10 道题目，让学生选择其中 7 道做；还可以把作业分为必做题和选做题等等。

2. 自主选择作业。学生在教师引导下自主参与作业内容的设计，自己布置作业。教师可以规定作业的内容（不是具体内容）、容量、结构。比如，在复习复数的计算时，可以要求自己选择最常见的 10 道复数计算题，要求包含加、减、乘、除、模、共轭的各种情况，还要提出自己不会的（或易错的）一道问题，并要有自己的初步分析。还可以尝试让学生以小组合作的形式编制单元检测卷，学生在教师的指导和学习小组长的带领下复习单元内容，找重点、列提纲、选择题型，进行学习合作，这算一次作业；在出好之后，交换着做，再算一次作业；做好之后，小组和小组之间互相批改，讨论、交流、评价，这又算一次作业。这种编制试卷的过程，既是学生对知识进行梳理的过程，也是同伴合作交流、学习、协作的过程。

（二）合适的作业量

关于作业量，存在认识上的误区：作业多多益善、“熟能生巧”、“做题百遍，其意自现”，但上海市教科院普教所的“课业负担与学业成绩关系的实证研究”课题研究表明：作业并非多多益善。在许多人眼里，课业负担与学业成绩有着一种不证自明的关系——其实感觉作业较轻时成绩好。学生学业成绩与教师布置作业时间的相关曲线基本呈倒“U”形，没有作业时间与作业时间太多，学业成绩都不太好。熟能生巧，巧的实质应是理解。运算操作为学生的理解领会提供了必要条件，熟能生巧的合理性

仅表现在必要性上，要达到理解，只靠熟练操作是不够的；[①]过度的常规练习会影响到学生的理解力和创造力的发展；[②]常规训练强调到不适当的地步，可能是学生形成不良信念、态度、情绪，对他们今后学习产生负面影响。[③]“熟能生巧”的背后是“熟能生厌”、“熟能生笨”，反复的机械训练只能导致让人厌倦，使人思维僵化，缺乏创新的生命力。

胡松林先生做过一个研究，教学内容是五年级“小数四则混合运算和应用题”单元，28 教时，两个平行班的课堂教学内容设计、教学方法相同（同一份教案、同一位教师授课），历时一个月的研究结果如下：

五年级学生作业量实验后测试成绩

	人数	每天作业量（题）	平均分数（$\overline{X}$）	标准差（S）	差异性检验
对照班	42	15	89.3	7.32	$t > 0.49$ $p > 0.05$
实验班	39	6	88.9	6.93	

研究结果表明，实验班和对照班的学生成绩差异不显著，从而说明过量的作业，并不是提高数学成绩的唯一出路。[④]

所以，作业的量应该控制在适度的范围内，而且，要在提高作业质量的前提下，在可以达到作业目的的基础上尽量减少作业量，减少重复的作业，达到精炼的目的。关于控制作业量的实践，华东模范中学徐鑫老师曾经在自己所教的班级里进行过实践，非常有效，他采用的办法有以下几点：

1. 加大课堂作业量，减少回家作业量。课堂作业要求学生在一定的时间内完成，教师能及时发现学生存在的问题，了解学生情况，

---

① 李士锜. 熟能生巧吗？数学教育学报，1996 年 3 月

② 李士锜. 熟能生笨吗？数学教育学报，1999 年 8 月

③ 李士锜. 熟能生厌吗？数学教育学报，2000 年 2 月

④ 胡松林. 数学教师札记. 上海教育出版社，1999 年 10 月

进行有效、及时的指导，效果比较好。为了提高学生的积极性，可以采用随堂小测验、课堂问答的形式。

2. 学生相互讨论过之后再做。这样可以节省学生做作业的时间，间接地减少了作业量。例如，在临近期末复习的前两周里，徐老师先用一周的时间帮学生复习好基础知识，最后一周基本上就不上课了。徐老师先把学生按照好、中、差三个人一组分好，再把要做的试卷提前发给学生，让他们以小组为单位课上进行讨论，但不能写在试卷上；然后徐老师告诉学生下一节课就考这份卷子，他们讨论时不会的问题可以向徐老师提出，由老师来答疑，但是试卷做过之后老师就不再答疑了。试卷的评分以小组为单位进行评价，在学习基础较好的小组里取三个人的最低分作为小组分数，在学习较差的小组里取三个人的最高分作为小组分数。试卷批改好之后，订正也是以小组为单位进行，不同小组之间可以交流。所有这些都尽量在学校完成，学生带回家的，就是下次要做的试卷，徐老师要求他们只能带回去思考，不能做在试卷上，这样第二天小组讨论时就能提高效率。实践证明这样极大地提高了学生的作业积极性。由于老师要批改、评分，学生都很重视，由于是小组讨论，基础最差的学生也可以通过交流学会如何做，由于是集体评分，学生不再自顾自，他们主动地相互帮助。而且这样做，学生的得分都很高，对他们的数学学习自信心、积极性提高作用明显。最后复习阶段，是学生时间最为紧张的阶段，各个学科的作业都很多，数学功课因为没有书面作业，学生花的时间最少，而效果最好，学生的及格率、优良率、平均分都有大幅的进步。

3. 提前告诉学生以后的作业。徐老师有时会把一周的作业都讲给学生，学生可以根据情况选择每天完成的量，在别的作业比较少时多做一些，在别的作业多时少做一些。徐老师会每天对学生作业的情况进行检查，遇到做的特别少的，问明原因，加强辅导。那些学习比较好的学生总是能提前完成。

第三节　不同类型的作业设计

一、不同课型的作业设计

概念学习永远是数学学习的首要环节，正确理解数学概念是学好数学的关键。

（一）数学概念课的作业设计

学生理解和掌握概念的过程实际上是掌握同类事物的共同本质属性的过程。例如，学习“棱锥”这个概念，就是掌握：凸多面体、底面是多边形、侧面是有一个公共顶点的三角形等这几个关键属性。同类事物的关键属性可以由学生从大量的同类事物的不同例证中独立发现，这种概念获得的方式叫做概念形成；也可以用定义的方式向学生直接揭示，学生利用已有认知结构中的有关知识来理解新概念，这种获得概念的方式叫做概念同化。概念形成与概念同化是两种基本的概念获得方式。

通常，由于数学学习是掌握前人已经发现的数学知识，把前人的数学活动经验转变成自己的经验，使其成为自己解决问题的工具的过程，因此概念同化是学生获得数学概念的最基本的方式。但是，由于学生的认知结构处于发展过程之中，他们的数学认知结构比较简单，数学知识比较贫乏而具体，在学习新的数学知识时，作为“固着点”的已有知识往往很少或者不具备，这时他们就只能采取概念形成的方式来学习。另一方面，随着年龄的增长，知识经验的不断丰富，学生所掌握的概念系统也从具体到抽象、从简单到复杂、从未分化到分化、从分散到统一地连续不断地获得发展，相应的，学生获得概念的方式也在发生变化。年龄越小，认知结构越简单而具体，概念形成的方式就用得越多。

掌握数学概念的标志是能够区分出概念的本质特征和非本质

特征，通过变式有助于学生达成正确区分的目的。主要的变式方法有通过非标准变式突出概念的本质属性，通过非概念变式明确概念的外延。

当数学概念的内涵中不仅包括概念的本质特征，还包括非本质特征，即缩小概念时，有效的方法是多提供包括非本质特征的概念变式，并把标准变式与非标准变式进行比较，以便分辨出哪些是概念的本质特征，哪些是其非本质特征。例如：

	垂直	三线八角	等腰三角形
标准变式			
非标准变式			

标准变式有助于学生对数学对象的准确把握，但也容易限制学生的思维，缩小概念的外延；利用非标准变式，变换数学对象的非本质属性，突出其本质属性。

如果概念的内涵中不能包括数学对象的本质特征的全部，就有可能不合理地扩大概念，这时有效的做法是列举一些容易混淆的非概念变式，让学生进行比较和分析。概念变式是指变换概念的表达和陈述方式，从而加深对概念的理解的方法。非概念变式是指提出与概念内涵不符的事例让学生辨伪，从而加深对概念本质属性的认识。亦即通过概念对象和非概念对象的变异，突出概念的本质属性及其固有边界。

例如，高中数学中“映射”概念的教学。教学中通过一系列非概念变式和概念变式的比较与分析，可以十分直观地、并从本质上理解概念的本质属性。

根据以上分析，数学概念课的作业设计应根据学习数学概念的方式而定。

1. 概念形成方式学习概念的作业设计（以方程概念的学习为例）

形成方程概念的主要阶段	作业设计举例
（1）辨别阶段。	【作业1】 比较两个等式：$3+2=5$ 和 $3x+2=5$，这两个等式有什么不同？
（2）分化与概括阶段。	【作业2】 判别下列式子是不是方程，并说明理由：①$2x+1$，②$2x-1=-3x$，③$5x>1$，④$\frac{1}{4}y^2=y+1$，⑤$10-7=3$，⑥$x-2y=6$，⑦$a+0.2b=8$（a，b 为未知数）。
（3）在特定的情境中检验假设，确认含有未知数的等式这一关键属性。	【作业3】 根据条件列方程：①某数减去5，得5；②某数乘以2后减去3，得5；③某数加上2后乘以3，得5；④某数的3倍与2的和等于8；⑤某数除以2后减去3，等于-7.5。
（4）把新概念的共同关键属性推广到同类事物中去。	【作业4】 ① 检验下列各数是不是方程 $2x-3=5$ 的解。(i) $x=6$；(ii) $x=4$； ② 检验下列各数是不是方程 $3x-1=2x+1$ 的解。(i) $x=4$；(ii) $x=2$； ③ 检验 $x=9$ 是不是方程 $\frac{x}{2}-3=-7.5$ 的解。

2. 概念同化方式学习概念的作业设计（以一次函数的学习为例）

同化方式学习概念的主要阶段	作业设计举例
（1）揭示概念的关键属性，给出定义、名称和符号。 “一次函数”的定义为“函数 $y=kx+b$，其中 k、$b\in\mathbf{R}$，$k\neq0$。”	【作业1】 函数 $y=kx$（k是常数且$k\neq0$），$y=x$，$y=-x$ 是否是一次函数，为什么？ 【作业2】 下列式子中，其中 y 是 x 的一次函数的是________。① $y=2x$；

（续　表）

同化方式学习概念的主要阶段	作业设计举例
(2) 对概念进行特殊的分类，讨论这个概念所包含的各种特例，突出概念的本质特征。（讨论一次函数的特例，突出函数表达式中，自变量 x 的次数为一次这个关键特征）。	② $y=1-\frac{1}{2}x$；③ $kx+b=0\ (k\neq 0)$。 【作业 3】 下列函数中哪些是一次函数？ ① $y=\frac{1}{x}+1$；② $y=-2x$； ③ $y=x^2+2$；④ $y=kx+b$（k，b 是常数）。
(3) 使新概念与已有认知结构中的有关观念建立联系，把新观念纳入到已有概念体系中，同化新概念。（把一次函数与函数概念、一次多项式概念等作比较，认识一次函数与这些相关概念的联系与区别）。	【作业 4】 函数 $y=x-1$，$y=-x+b$，$y=0$，$y=1$，$y=-x$，$y=x^2$，$ay=x+3\ (a\neq 0)$ 是否是一次函数，若是，指出相应的 k、b 各是多少。 【作业 5】 已知函数 $y=(m+3)x+m$。
(4) 用肯定例证与否定例证让学生辨认，使新概念与已有认知结构中的相关概念分化。	(i) 当 m 取何值时，这个函数是正比例函数？ (ii) 当 m 在什么范围内取值时，这个函数是一次函数？
(5) 把新概念纳入到相应的概念体系中去，使有关概念融会贯通，组成一个整体。	【作业 6】 已知 y 是 x 的一次函数，当 $x=-3$ 时，$y=-6$；当 $x=3$ 时，$y=-2$。求这个函数的解析式。

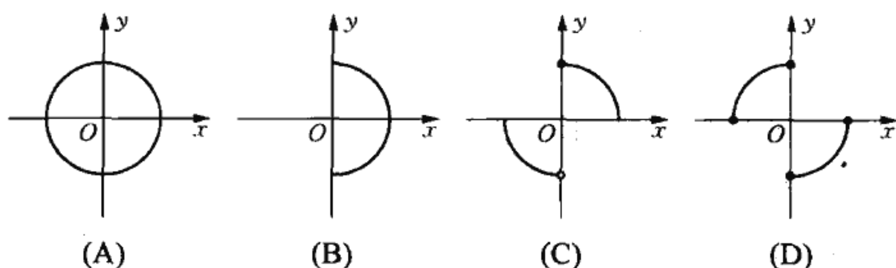
3. 多角度理解概念的作业设计（以函数概念的学习为例）

中国数学教师运用概念性变式进行教学的基本特征是：通过各种概念变式之间以及概念变式与非概念变式之间的差异与联系来把握概念的内涵与外延，实现对概念的多角度的理解。（《数学教学》2003 年第 1 期）例如，函数概念表示的多样性，一方面表现在定义域、值域表示的多样性，可以用集合、区间、不等式等不同形式表示；另一方面表现在它可以用图象、表格、对应、解析式等方法表示，从每一种表示中都可以独立地抽象出函数概念来。认识学习函数概念一般有三个角度：用变量的依赖关系认识函数、用图形认识函数、用对应关系认识函数。

能否正确地使用函数的不同表示形式，灵活地对不同的表示进行转换，是考察函数概念形成水平的重要标准。为此，我们可以设

计配置如下作业：

【作业 1】 下列图形中，能作为某个函数的图象的只能是（　　）。



【作业 2】 某企业 2005 年四个季度生产某种型号机器的数量 y（万台）与季度 x 的函数关系是：

x(季度)	1	2	3	4
y(万台)	10	12	14	16

试写出函数的定义域，并作出函数的图象。

【作业 3】 下面四组中函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一个函数的是（　　）。

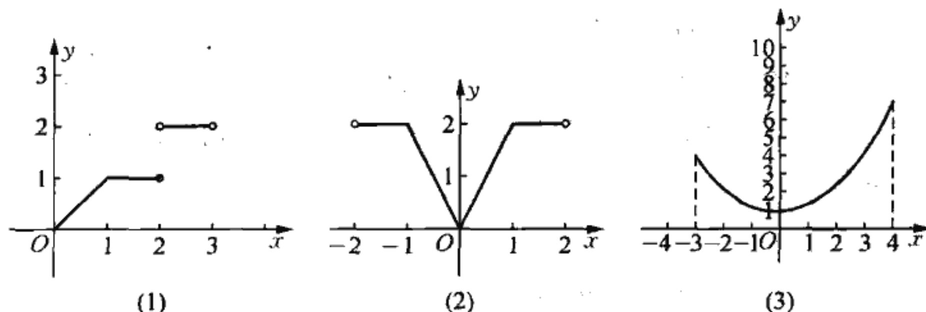
(A) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$, $g(x)=x-1$

(B) $f(x)=|x|$, $g(x)=\begin{cases} x & (x\geqslant 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$

(C) $f(x)=x^0$, $g(x)=1$

(D) $f(x)=(\sqrt{x})^2$, $g(x)=\sqrt{x^2}$

【作业 4】 观察下列各函数的图象，并写出它们的值域。



根据以上作业，学生可以从图象、表格、解析式等角度对函数的概念进行理解，在此过程中帮助他们在各种函数的表示（语言的、图象的、表格的、符号的）之间相互转换，从而促进对函数概念的理解。

（二）数学命题课的作业设计

一般地，数学命题学习分为命题获得、命题证明和命题应用三个阶段①。以学习命题“若 $f(x)$是奇函数，且 $f(x)$在$(0, +\infty)$上是增函数，则$f(x)$在 $(-\infty, 0)$上也是增函数”为例。

命题获得	（1）结合图象，考察函数 $f(x)=2x$，$f(x)=x^3$，$f(x)=-\frac{1}{x^3}$ 的奇偶性、单调性，并归纳这些函数的共同性质（①均为奇函数；②在$(0, +\infty)$上是增函数；③在$(-\infty, 0)$上也是增函数）。并以此为基础抽象概括出函数的一个一般性命题。
命题证明	（2）证明：若 $f(x)$是奇函数，且 $f(x)$在$(0, +\infty)$上是增函数，则 $f(x)$在$(-\infty, 0)$上也是增函数。
命题应用	（3）已知 $f(x)$是定义在$(-1, 1)$上的奇函数，在区间$[0, 1)$上是增函数，且 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$，求实数 a 的取值范围。 （4）若 $f(x)$是定义在$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$上的奇函数，且在$(-\infty, 0)$上是增函数，又 $f(-3)=0$，则 $f(x)<0$ 的解集是__________。

1. 强化命题学习的变式作业设计

数学命题学习的整个心理过程包含着刺激—反应的联结因素和信息加工的认知因素，数学命题学习是一个知识信息获取和智能信息获取并存的过程，数学命题学习的高级目标是通过上、下位学习，同位学习，并列学习从而形成个体的命题域和命题系，改组、丰富和完善个体的认知结构②。采用变式教学的策略可使学生辨别数学命题的不同表达形式或者错误表达形式，从而多角度地理解掌握数学命题。

---

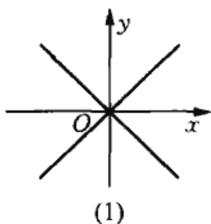
①② 俞平. 论数学命题学习，数学教育学报，1999 年 11 月

例如，为使学生从本质上理解曲线的方程与方程的曲线两个概念，需要为学生提供在特定的情境中检验假设、确认关键属性的机会。检验过程中，采用变式是一种有效手段。为此，可安排以下三组练习。

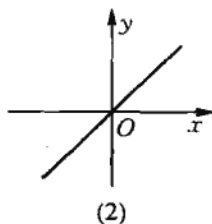
【作业 1】 下列方程分别对应下列曲线中的哪一条？

① $x-y=0$；　　② $x^2-y^2=0$；

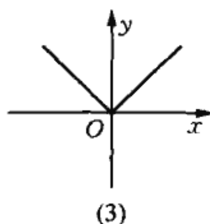
③ $\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$；　　④ $|x|-y=0$。



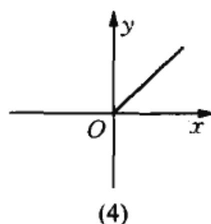
(1)



(2)



(3)

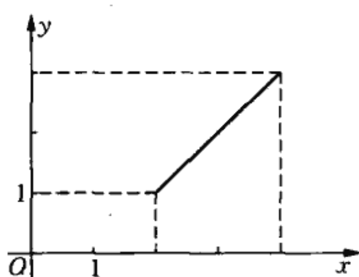


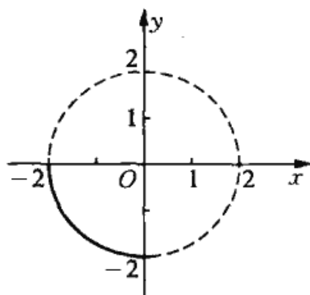
(4)

【作业 2】 (1) 以 y 轴为对称轴的等腰三角形的底边的方程是 $x=0$ 吗？为什么？

(2) 到 x 轴的距离等于 2 的点的轨迹的方程是 $y=2$ 吗？为什么？

【作业 3】 (1) 写出表示下列图形(实线部分)的方程：





(2) 作下列方程所表示的图形：① $y=-x-1(0\leqslant x\leqslant 2)$；② $y=\sqrt{1-x^2}$。

2. 强化规则学习的变式作业设计

规则学习带有操作的特点，“做中学”是一个基本规律。通过适度的操作获得对规则的感性认识，积累操作经验，又通过对操作的

反省加深对规则的理解。例如合并同类项的作业设计：

【作业1】 判断下列各式是否正确，如果不正确请改正。

① $8x-3x=5$；② $2x+3y=5xy$；③ $-2x^2+2x^2=0$；④ $3x^2+5x^3=5x^5$。

【作业2】 合并同类项：① $2x^3+3x^3-4x^3$；② $-pq-pq-qp$；③ $\frac{1}{2}ab^2-2ab^2+\frac{3}{4}ab^2$。

【作业3】 合并同类项，并说明该多项式是几项式。

① $3x^2+\frac{2}{3}x+2-2x-2x^2-5$；② $2xy^2z-4xyz-3xzy^2+2xyz$。

【作业4】 在□里填上同一个数，使多项式 $\square x^2+\square x+1+2x^2-x+\square$ 是二项式。

再如“因式分解、提公因式法”的作业设计：

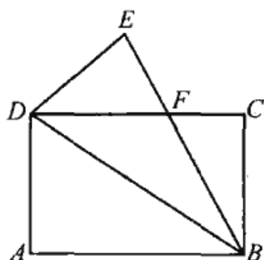
作业内容	设计意图
【作业1】 指出下列多项式中各项的公因式：(1) $4a^2+10ab$；(2) $12xy^3z-9x^3y^2$；(3) $3a^2-9ab+a$（引申：$-3a^2-9ab+a$）；(4) $6m(p-3)+5n(p-3)$（引申：$6m(p-3)+5n(3-p)^2$，$6m(p-3)+5n(3-p)^3$）。	(1) 确定公因式是分解因式的关键；(2) 公因式由数字系数与字母因数组成；(3) 数字系数要注意正负。
【作业2】 把作业1中的各题分解因式。	体会分解因式是乘法分配律的逆运用。
【作业3】 填空：(1) $3x^3+6x^2=$________$(x+2)$；(2) $7a^2-21a=$________$(a-3)$；(3) $x^2y+xy^2-xy=xy($______$)$。	(1) 如何提取公因式；(2) 提取公因式后“留”下哪个多项式；(3) 如何验证运算正确。
【作业4】 把下列各式分解因式：(1) $-24x^2y-12xy^2+28y^3$；(2) $56x^3yz+14x^2y^2z-21xy^2z^2$；(3) $mn(m-n)-m(n-m)^2$。	对提供因式法规则的小结：(1) 因式分解的结果是整式积的形式；(2) 确定公因式是关键；(3) 要注意系数的正负。

又如图形折叠问题——勾股定理的应用：

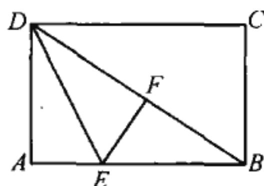
已知矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=3$，按下列要求折叠，试求出所要求的结果：

(1) 如图，把矩形 $ABCD$ 延对角线 BD 折叠，得 $\triangle EBD$，BE 交 CD 于 F，求 $S_{\triangle BFD}$。

(2) 如图，折叠矩形 $ABCD$，使 AD 与对角线 BD 重合，求折痕 DE 的长。



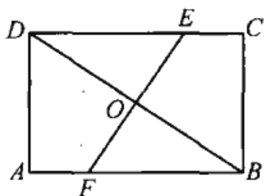
图(1)



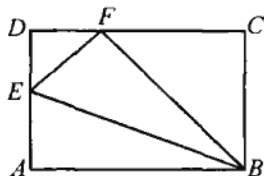
图(2)

(3) 如图，折叠矩形 $ABCD$，使点 B 与点 D 重合，求折痕 EF 的长。

(4) 如图，E 为 AD 上的一点，把矩形 $ABCD$ 延 BE 折叠，若点 A 恰好落在 CD 上的点 F 处，求 AE 的长。



图(3)



图(4)

本作业设计以一个基本图形为载体，让学生在长方形的有关折叠中，寻找变与不变的量，以勾股定理等知识来建立关系，从而解决问题。围绕某个基本图形和某个核心知识进行有变式的训练既有助于完善学生的认知结构又有助于发展学生的能力。

通过本作业练习，学生可以在勾股定理及其逆定理的运用中，体会它在度量几何中的作用，进一步理解形数之间的联系。

3. 有层次推进的作业设计

数学活动过程的基本特征是层次性。这种层次性既可以表现为一系列的台阶，也可以表现为某种活动策略或经验。因此，在数学活动过程中，可以通过有层次的推进，使学生分步解决问题，积累多种活动经验。所以，在数学作业设计中，对同一问题设问的梯度由易到难，使学生踏着阶梯一步一步探索，可以让每一位学生都能获得不同程度的成功尝试，激发学生的潜能。从学习的效果来看，设问的多梯度性可以帮助学生发掘问题的各个方面，达到深层次认识问题的本质，从而培养思维的深刻性。

例如，以下有关百分比的问题：某联通分店经营手机批发。(1)若1 月份批发 3000 只，3 月份批发 3630 只，问：每月批发的平均递增的百分比为多少？(2)若 1 月份批发 3000 只，3 月份批发 4500 只，3 月比 2 月递增的百分比高 5%，求 2 月份的销售量。(3)若 2 月比 1 月批发增长 20%，3 月比 2 月批发增长 25%，且第一季度共销售手机 9250 只，求 3 月份的销售量。

本例的特点是围绕百分比这一概念，所设计的问题起点低（第 1 题只需列出 $3000(1+x)^2=3630 \Rightarrow x=10\%$ 即可），问题有层次，在变化的设问中应用百分比的概念（第 2 题的关键仍是设 2 月份比 1 月份增长 x），既达到透彻理解概念的目的，又培养了学生看到问题本质的能力（第 3 题的关键是设 1 月份的销售量为 x，而不是问什么设什么）。

再如函数的单调性：定义在区间$[a, b]$上的函数 $y=f(x)$，辨析下列命题的真假：

(1) 若存在 $x_1, x_2 \in [a, b]$，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则说函数 $y=f(x)$ 在区间$[a, b]$上是增函数。

(2) 若有 n 个数属于区间$[a, b]$，当 $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) < \cdots < f(x_n)$，则说函数 $y=f(x)$ 在区间$[a, b]$上是增函数。

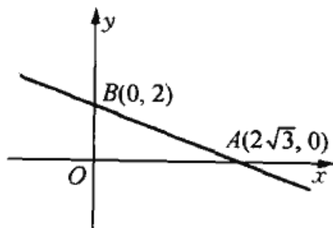
(3) 将(2)中“n 个数”改成“无数个数”，则说函数 $y=f(x)$ 在区间$[a, b]$上是增函数。

（4）将（1）中“存在”改成“任意”，则说函数 $y=f(x)$ 在区间$[a, b]$上是增函数。

这个作业训练内容针对如何引导学生理解函数单调性的本质涵义，既不在细枝末节上纠缠，又避免过于繁杂和技巧性过强的训练，通过四个辨析，在变式中逼近函数单调性的本质特征，化解了“用静态的数学符号来描述动态的数学对象”的思维难点，使抽象枯燥的数学成为火热的数学思考。

有层次的推进还表现在问题解决过程中思维的深化，发散思维和收敛思维的交织转换。例如，以下作业就体现了数学思维有层次推进的无穷魅力。①

已知：在直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$ 的图象分别与 x 轴、y 轴交于点 A、B。



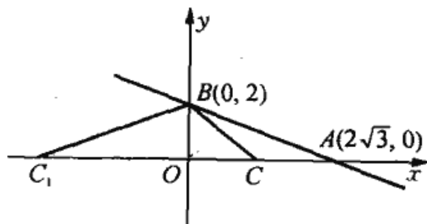
（1）求$\angle BAO$的正切值；

（2）若以 AB 为一边的等腰$\triangle ABC$的底角为 30°，试求点 C 的坐标。

解：（1）因为点 A、B 两点的坐标为 $A(2\sqrt{3}, 0)$，$B(0, 2)$，所以 $OB=2$，$OA=2\sqrt{3}$，所以，$\tan\angle BAO=\frac{OB}{OA}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

（2）由（1）可知，$\angle BAO=30°$。

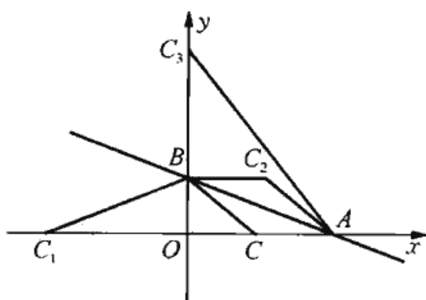
（i）较初步的想法：从“AB 为一边的等腰$\triangle ABC$的底角为 30°”入手考虑，有两种情况：一是以 AB 为底边，$\angle BAC=30°$ 为底角，此时点 C 的坐标为 $C\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$；二

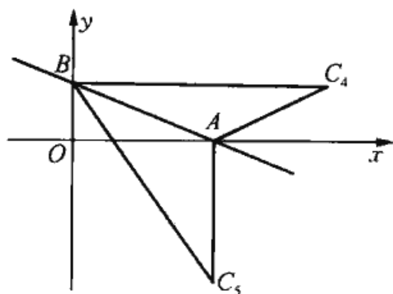


① 李庚南．数学自学·议论·引导教学法．人民教育出版社，2005 年 11 月

是以 AB 为一腰，$\angle BAC_1=30^\circ$ 为底角，此时点 C_1 的坐标为 $C_1(-2\sqrt{3}, 0)$。学生作业中的这种答案，初具分类思想，但思维尚缺乏完整性、严密性。

(ii) 较深入的想法：有的学生运用轴对称性质将思路拓宽，又求得两解：$C_2\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, 2\right)$，$C_3(0, 6)$。

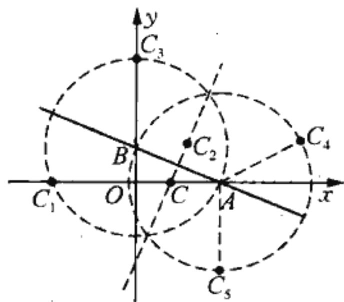




(iii) 完整的想法：有的学生再以顶角的顶点分类，又得到两解：$C_4(4\sqrt{3}, 2)$，$C_5(2\sqrt{3}, -4)$。

这个作业的意图不在于要求所有学生一步到位，而在于作业后的完整而深入的交流与共享。在交流与共享的过程中，不仅可以培养学生的发散思维能力和完善各自的思维品质，尤其是分类讨论的思想，还可以相互激发学习兴趣，增强学习的主动性和能动性。

(iv) 完整而深入的想法：点 C 是具有某种性质的点的轨迹的交点，本问题的实质是轨迹问题（见右图所示）。



这个作业，通过学生的自主实践探究、相互交流、教师的恰当引导，思维活动层层深入。既达到培养思维的灵活性、严密性、深刻性的目的，又能让学生在有趣的、高涨的、激动的情绪中学习与思考，体会智慧的力量，体验创造的欢乐。

4. 形成命题域和命题系的作业设计

要对命题有更深层次的理解，在命题应用中形成命题域和命题系是至关重要的。例如，对于命题：$a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0$ 且 $b=0$，要对该命题有深刻理解，就应把握与此相关的一些等价命题，如：$|a|+|b|=0 \Leftrightarrow a=0$ 且 $b=0$、$\sqrt{a}+\sqrt{b}=0 \Leftrightarrow a=0$ 且 $b=0$ 等等。进一步，还应掌握该命题的一些弱抽象命题，如："$a^n+b^n=0$，n 为偶数，$a \in \mathbf{R}$，$b \in \mathbf{R}$，则当且仅当 $a=0$ 且 $b=0$ 时等式成立"等等。这样就形成了个体的命题域和命题系，逐步完善了认知结构。由此可见，数学命题的应用是在使学生获得智能信息的同时，逐步形成稳定的命题域和命题系，充实和完善个体认知结构的过程。（俞平，论数学命题学习，数学教育学报，1999 年 11 月）

以下是关于四边形的性质的相关命题作业设计：

【作业 1】 求证：顺次连结四边形四条边的中点，所得的四边形是平行四边形。

强化作业 1 中的条件"四边形"为"平行四边形"，则得：

【作业 2】 求证：顺次连结平行四边形四条边的中点，所得的四边形是平行四边形。

【作业 3】 求证：顺次连结矩形四条边的中点，所得的四边形是平行四边形（菱形）。

【作业 4】 求证：顺次连结菱形四条边的中点，所得的四边形是平行四边形（矩形）。

【作业 5】 求证：顺次连结正方形四条边的中点，所得的四边形是平行四边形（正方形）。

强化作业 1 中的条件"四边形"为"梯形"，则得：

【作业 6】 求证：顺次连结梯形四条边的中点，所得的四边形是平行四边形。

【作业 7】 求证：顺次连结等腰梯形四条边的中点，所得的四边形是平行四边形（菱形）。

【作业 8】 求证：顺次连结直角梯形四条边的中点，所得的四边

形是平行四边形。

归纳作业3、5、7中的条件矩形、正方形、等腰梯形的共性：对角线相等，则得：

【作业9】 求证：如果四边形的对角线相等，则顺次连结其四条边的中点，所得的四边形是菱形。

归纳作业4、5中的条件菱形、正方形的共性：对角线相互垂直，则得：

【作业10】 求证：如果四边形的对角线相互垂直，则顺次连结其四条边的中点，所得的四边形是矩形。

结合作业9、10的条件，则得：

【作业11】 求证：如果四边形的对角线相等且相互垂直，则顺次连结其四条边的中点，所得的四边形是正方形。

以上作业设计，运用“一般性寓于特殊性之中”的原理，形成等价或半等价的命题链。通过这样的作业训练，可以帮助学生把握知识的内在联系，理清来龙去脉，完善具有活性的认知结构。

（三）数学习题课的作业设计

数学习题课的一个很重要的特点就是练习，练习是数学学习的一种重要手段，概念、定理、公式和法则是需要通过练习才能巩固和掌握。在习题课上可以集中训练学生的技能技巧，培养学生实际操作能力。精心设计的习题课才能达到预期的效果。通常是设计编制一题多解、一题多变、一题多用、多题一法的习题，以提高学生灵活运用知识的能力。

通过习题课的学习可以帮助学生巩固基础、消除疑难、梳理知识、形成知识系统，从而培养学生的数学思维能力，使学生深化对数学思想方法的理解和应用。

1. “串”题的方法

所谓串题就是把能反映和揭示某一数学知识、技能、方法和思想的一组数学题串在一起，形成一组序列。有经验的老师认为，一堂习题课，就应是一串有内在联系的作业题。

例如，下列作业能反映分式方程的基本解法。解不等式 $(x+4)(x-1)<0$（课本引例）→ 解不等式 $\frac{x+4}{x-1}<0$ → 解不等式 $\frac{x+4}{x-1}<2$ → 解不等式 $\frac{x+4}{x-1}\geqslant 2$ → 解不等式 $\frac{1-a}{x-1}<a$ $(a\in\mathbf{R})$。这组作业题，能够较好地反映分式不等式的解法，体现蕴涵其中的化归思想。

再如，以下作业较全面体现了二次函数最值的基本求法：求下列函数的最大值或最小值，并求出取最值时相应的自变量 x 的值。(1) $f(x)=x^2-4x-2\quad x\in\mathbf{R}$ →(2) $f(x)=6x-3x^2\quad x\in\mathbf{R}$ →(3) $f(x)=-x^2-4x-3\quad x\in[-3,1]$ →(4) $f(x)=x^2-2x-3\quad x\in[-2,0]$ →(5) 求函数 $f(x)=x^2-4x+1$ 在 $[t,4]$ 上的最大值和最小值，其中 $t<4$。这组作业在安排上循序渐进，层次清晰，思维要求由浅入深，体现了作业的渐进性和发展性要求。而且我们认为，与二次函数有关的最值问题，到达上述第(5)题的思维要求是比较恰当的，对下列作业要慎重对待：求函数 $f(x)=x^2-2x+2\quad x\in[t,t+1]$ 的最小值，其中 $t\in\mathbf{R}$。

一法多用，能使学生对同一类型的数学问题有一个基本的思路和基本方法，透过不同现象抓住其本质。“多题一法”也是作业设计的基本方法。如“一元二次方程的根与系数的关系”可以设计如下作业题：

设 x_1，x_2 是方程 $2x^2+4x-3=0$ 的两个根，利用根与系数的关系，求下列各式的值：(1) $(x_1+1)(x_2+1)$；(2) $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$；(3) $x_1^2+x_2^2$；(4) $(x_1-x_2)^2$；(5) $x_1^3+x_2^3$；(6) $x_1^2x_2+x_1x_2^2$；(7) $\left(x_1+\frac{1}{x_2}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_1}\right)$；(8) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$。

通过这个作业，学生可以掌握求关于已知方程两根的对称式的值的思路、依据、基本步骤，熟练代数式的恒等变形。

“不怕不识货，就怕货比货”，在比较中认识问题，用比较的方法设计的作业，可以帮助学生深刻认识知识，正确运用知识，提高分析

问题和解决问题的能力。

例如，一元二次方程根的判别式的应用作业设计：

【作业1】 不解方程，判别下列方程的根的情况：(1) $2x^2+3x-4=0$；(2) $16y^2+9=24y$；(3) $5(x^2+1)-7x=0$。

【作业2】 k 取什么值，方程 $2x^2-(4k+1)x+2k^2-1=0$ 有两个不相等的实数根？有两个相等的实数根？没有实数根？

【作业3】 求证方程 $(m^2+1)x^2-2mx+m^2+4=0$ 没有实数根。

以上三个作业题，其共同点是都是一元二次方程根的判别式的应用。不同点是：作业1是已知系数，判定根的情况；作业2是已知根的情况，求系数中字母的值（或取值范围）；作业3是运用非负数性质判定方程的根的判别式的值的符号，从而证明根的性质。作业的设计目的在于让学生在操作实践中比较问题的异同点，加深对问题的认识和把握。

2. "变"题的方法

变题的方法是围绕某一数学知识、技能、方法和思想，从其正面、反面、侧面的角度，从思维的顺向和逆向、横向和纵向呈现作业题。常见的有一题多解型：一题多解即引导学生对同一来源材料从不同角度、不同方位快速联想及思考问题，探求不同的解答方案，从而拓广思路，培养思维的敏捷性；一法多用型：一法多用即将解决某一问题的方法加以归纳、总结，形成技巧，并用以解决其他问题，通过这种变化，达到多题归一的目的，培养学生知识、方法的迁移能力；一题多变型：一题多变即从一道习题出发，通过逆向思考、探求新知、变化难度、改变条件、变化题型、变数、变字、变符号等手段，使原来的一道题变成一类题，再由一类题变为多类题，并通过对变式题的研究、解决，形成完整的知识结构，培养学生思维的灵活性，达到举一反三、触类旁通、熟一片、通一类的效果。

例如，两角和与差的正切公式，围绕公式所揭示的法则，采用全方位、多角度的方法，体现层次分明、思维递进，有助于学生全面深刻地掌握公式，有助于学生代数推理能力的提高。

(1) 顺用公式：已知 $\tan\alpha = \frac{1}{3}$，$\tan\beta = -2$，求 $\tan(\alpha+\beta)$、$\tan(\alpha-\beta)$ 的值。

变 1：已知 $\tan\alpha = \frac{1}{3}$，$\cot\beta = -\frac{1}{2}$，求 $\cot(\alpha+\beta)$ 的值。

变 2：已知 $\tan\alpha = \frac{1}{3}$，$\tan(\alpha+\beta) = -2$，求 $\tan\beta$ 的值。

(2) 逆用公式：求值：$\frac{\tan 5^\circ + \tan 40^\circ}{1 - \tan 5^\circ \tan 40^\circ}$。

变 1：求值：$\frac{\cot 5^\circ + \cot 40^\circ}{1 - \cot 5^\circ \cot 40^\circ}$。

变 2：求值：$\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ}$。

(3) 变用公式：已知：$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$，求 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$ 的值。

上面讲的是"一题变多题"，反过来，从多个指向某种同类属性的习题中，经过改编、演变、变化成一道适合需要的习题，这一道习题，既脱胎于这些原形习题保持了训练价值的内核，又具有鲜明的个性特色。

(四) 数学复习课的作业设计

在数学教学中经常要进行复习，它的作用是巩固基础知识、加深对知识、方法及应用的认识，帮助学生形成良好的认知结构，同时还可以帮助学生对阶段学习查漏补缺、巩固提高。因此，复习课也是数学学科的一种基本课型。

复习课分为两种：一种是经常性的复习，一种是阶段性的复习(含学段总复习)。前者又包括新知识教学前的复习、新知识教学中的复习和新知识教学后的复习。教师可根据这三种复习的目的、作用来设计好内容和问题，为新课的运作铺平道路，并把旧知识纳入新知识的体系中，以及明确新知识在解决问题中的作用。后者是一个教学单元或一章结束或期中、期末以及学段总复习。通常的数学复习课是指这种课型。它的作用是：系统归纳整理阶段所学的知

识、方法以及梳理知识方法所反映的数学思想，沟通知识、方法间的联系，形成所学数学内容的整体结构，再通过解决一些综合或应用问题训练技能，进而提高能力。我们认为复习课对调整教与学，特别对加强知识、方法的理解，提高学生分析问题和解决问题的能力，培养创新意识和应用能力很有裨益。

根据以上分析，复习课的作业设计可采用以下方法：

1. 设计阶梯型题组

根据教材内容的需要，精选不同层次的题目，由易到难，按照不同能力要求编成题组，有针对性地设置知识、方法、能力的最近发展区，使思考坡度循序渐进、恰到好处，学生每解一题，都能亲身体会到其中蕴含的规律，领略到解题的意境和命题的构思。例如三角函数的最值复习课：

A 组题	1. 函数 $y=-5\sin x$ 的最大值________，最小值________。
	2. 函数 $y=1-\frac{1}{2}\cos x$ 的最大值________，最小值________。
	3. 函数 $y=\sin x\cos x$ 的最大值________，最小值________。
	4. 函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的最大值________，最小值________。
B 组题	1. 函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos x+\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最大值________。
	2. 函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小值________。
	3. 函数 $y=\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x$ 的最大值是________。
	4. 函数 $y=\sin 2x-2\cos^2 x$ 的最小值是________。
C 组题	1. 函数 $y=\cos^2 x-3\cos x+2$ 的最大值是________。
	2. 函数 $y=2\sin x-\cos 2x$ 的最小值________。
	3. 当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，函数 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的最大值是________。
	4. 函数 $y=\sin x\cos x+\sin x+\cos x$ 的最小值________。

2. 一题多解的作业题

为实现数学复习课的教学目的，适当地设计一题多解的作业题，可以激发学生去发现和去创造的强烈欲望，加深学生对所学知识的深刻理解，训练学生对数学思想和数学方法的娴熟运用，锻炼学生思维的广阔性和深刻性、灵活性和独创性，从而培养学生的思维品质，发展学生的创造性思维，培养学生的发散思维能力，这对学生今后的数学学习和数学知识的应用将产生深远的影响。

【作业 1】 比较$\frac{3}{4}$和$\frac{5}{6}$的大小。[①]

解法一：化作同分母比较。

解法二：化作同分子比较。

解法三：化作小数比较。

解法四：借助"1"，作"差比"：$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$，$1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$，因为$\frac{1}{4}>\frac{1}{6}$，所以$\frac{3}{4}<\frac{5}{6}$。

解法五：借助"$\frac{1}{2}$"，作"和比"：$\frac{3}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$，$\frac{5}{6}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$，因为$\frac{1}{4}<\frac{1}{3}$，所以$\frac{3}{4}<\frac{5}{6}$。

解法六：借助"分母的最小公倍数 12"，作"积比"：$\frac{3}{4}\times 12=9$，$\frac{5}{6}\times 12=10$，因为$9<10$，所以$\frac{3}{4}<\frac{5}{6}$。

解法七：借助"同数相除$\frac{3}{4}$"，作"商比"：$\frac{3}{4}\div\frac{3}{4}=1$，$\frac{5}{6}\div\frac{3}{4}=\frac{10}{9}$，因为$1<\frac{10}{9}$，所以$\frac{3}{4}<\frac{5}{6}$。

解法八：借助线段直观图作比较。

【作业 2】 （一元二次方程根与系数的关系）已知方程 x^2+7x+

---

① 胡松林. 数学教师札记. 上海教育出版社，1999 年 10 月

$2=0$ 的两根为 a，b，计算 $|a^2b|+|ab^2|$ 的值。

解法一：由题意，得 $\begin{cases}a+b=-7,\\ab=2,\end{cases}$ 所以 a、b 同号，且 a、b 同为负号。

所以，$|a^2b|+|ab^2|=-a^2b-ab^2=-ab(a+b)=(-2)\times(-7)=14$。

解法二：由题意，得 $\begin{cases}a+b=-7,\\ab=2,\end{cases}$

所以，
$$\begin{aligned}|a^2b|+|ab^2|&=\sqrt{(|a^2b|+|ab^2|)^2}\\&=\sqrt{a^4b^2+2|a^2b||ab^2|+a^2b^4}\\&=\sqrt{a^2b^2(a^2+b^2)+2|a^2b\cdot ab^2|}\\&=\sqrt{a^2b^2[(a+b)^2-2ab]+2|a^3b^3|}\\&=\sqrt{4\times(49-4)+2\times 8}\\&=\sqrt{196}=14。\end{aligned}$$

解法三：由题意，得 $\begin{cases}a+b=-7,\\ab=2,\end{cases}$

所以，
$$\begin{aligned}|a^2b|+|ab^2|&=|2a|+|2b|=2(|a|+|b|)\\&=2\sqrt{(|a|+|b|)^2}\\&=2\sqrt{a^2+b^2+2|ab|}\\&=2\sqrt{(a+b)^2-2ab+2|ab|}\\&=2\sqrt{(-7)^2-2\times2+2\times2}\\&=14。\end{aligned}$$

解法四：由题意，得 $\begin{cases}a+b=-7,\\ab=2,\end{cases}$ 所以 a、b 同号，所以，a^2b 与 ab^2 也同号，

所以，
$$\begin{aligned}|a^2b|+|ab^2|&=|a^2b+ab^2|\\&=|ab(a+b)|\\&=|2\times(-7)|=14。\end{aligned}$$

一题多解的作业能够克服思维定势，本题可以从一元二次方程根与系数的关系入手得到解法一，可以从 $|A| = \sqrt{A^2}$ 入手得到解法二，可以从 $a^2b = a \cdot ab = 2a$，$ab^2 = ab \cdot b = 2b$ 得到解法三，也可以利用“同号两数的绝对值的和等于和的绝对值”入手得到解法四。多角度的入手可以为学生独立生动的思维活动提供条件，如果作业以后再能及时交流，就能达到思维碰撞，以少胜多的作业目的。

【作业 3】（半角的正弦、余弦和正切）用多种方法求 $\tan 15^\circ + \cot 15^\circ$ 的值。

解法一：$\because \tan 15^\circ = \tan \dfrac{30^\circ}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}} = \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}}$

$$= 2-\sqrt{3},$$

$\cot 15^\circ = \dfrac{1}{\tan 15^\circ} = 2+\sqrt{3}$，

$\therefore \tan 15^\circ + \cot 15^\circ = 2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3} = 4$。

解法二：$\because \tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = 2-\sqrt{3}$，

$\cot 15^\circ = 2+\sqrt{3}$，

$\therefore \tan 15^\circ + \cot 15^\circ = 2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3} = 4$。

解法三：$\tan 15^\circ + \cot 15^\circ = \dfrac{1-\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} + \dfrac{1}{\dfrac{\sin 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}}$

$$= \frac{2}{\sin 30^\circ} = 4。$$

解法四：$\tan 15^\circ + \cot 15^\circ = \dfrac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \dfrac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \dfrac{1}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$

$$= \frac{2}{\sin 30^\circ} = 4。$$

解法五：$\tan 15^\circ + \cot 15^\circ = \tan 15^\circ + \dfrac{1}{\tan 15^\circ} = \dfrac{1+\tan^2 15^\circ}{\tan 15^\circ}$

$$= \frac{2}{\sin 30^\circ} = 4。$$

【作业 4】（不等式的证明）在 a 克蔗糖溶液中含有 b 克蔗糖（$a>b$），若再加入 m 克蔗糖，则糖水变得更甜了，请根据以上叙述写出其中蕴涵的数学关系式，并加以证明。

蕴涵的数学关系式为：$\dfrac{b+m}{a+m} > \dfrac{b}{a}$。

证法一：作差比较法证明，即可；

证法二：作商比较法证明，即可；

证法三：分析法，要证 $\dfrac{b+m}{a+m} > \dfrac{b}{a}$ 成立，只要证 $a(b+m) > b(a+m)$，即证 $am > bm$ 即可；

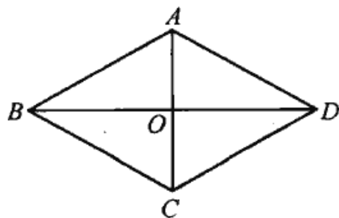
证法四：综合法，由已知 $a>b>0$，$m>0$ 得 $am>bm$，两边同加 ab，得 $a(b+m)>b(a+m)$ 即可；

证法五：函数法，构造函数 $f(x) = \dfrac{b+x}{a+x}$，只需用函数的单调性，比较 $f(0) < f(m)$ 即可；

证法六：斜率法构造，点 $(a,\ b)$ 与 $(0,\ 0)$ 和 $(-m,\ -m)$ 两点连线的斜率，借助数形结合即可。

这样，学生从不同的思路去剖析数量关系，通过学生自己的主动思考和动手解题，既达到了巩固知识的教学目的，又充分体现了学生的主体作用与参与意识，还把学生的创新意识的培养实实在在地落实在了基础知识上，增强了学生的动脑、动手的能力。

【作业 5】 已知菱形的边长等于两条对角线长的比例中项，求菱形的锐角。



如图，设菱形的对角线 $AC = 2a$，$BD = 2b$，$\angle ABC = 2\alpha$（2α 为锐角），则边长 $AB = 2\sqrt{ab}$，且 $a < b$。

解法一：由菱形的性质可知：$AB^2 = AO^2 + BO^2$，所以，$(2\sqrt{ab})^2 = a^2 + b^2$。因为$a < b$，解得$a = (2-\sqrt{3})b$。所以$\tan\alpha = \frac{AO}{BO} = \frac{a}{b} = 2-\sqrt{3}$；$\tan 2\alpha = \frac{2(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})^2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$。因为$2\alpha$为锐角，所以$2\alpha = \frac{\pi}{6}$。即菱形的锐角为$\frac{\pi}{6}$。

解法二：由菱形的面积可知：$2 \times \frac{1}{2}AB \times BC\sin 2\alpha = \frac{1}{2}AC \times BD$。从而$2 \times 2\sqrt{ab} \times 2\sqrt{ab}\sin 2\alpha = 2a \times 2b$，所以$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$。因为$2\alpha$为锐角，所以$2\alpha = \frac{\pi}{6}$。即菱形的锐角为$\frac{\pi}{6}$。

解法三：用解析法求解。以对角线BD为x轴，O为原点建立平面直角坐标系，则菱形的顶点A，B的坐标为$A(0, a)$，$B(-b, 0)$。于是，$\tan\alpha = k_{BA} = \frac{a-0}{0-(-b)} = \frac{a}{b}$。以下，同解法一。

解法四：由余弦定理可知，在$\triangle ABC$中，$\cos 2\alpha = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = 1 - \frac{a}{2b}$，由解法一可知$a = (2-\sqrt{3})b$，所以$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$，因为$2\alpha$为锐角，所以$2\alpha = \frac{\pi}{6}$。即菱形的锐角为$\frac{\pi}{6}$。

解法五：从倍角的正弦公式可知，在$\triangle ABO$中，$\sin\alpha = \frac{AO}{AB} = \frac{a}{2\sqrt{ab}}$；$\cos\alpha = \frac{BO}{AB} = \frac{b}{2\sqrt{ab}}$，$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \frac{a}{2\sqrt{ab}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{2}$，因为$2\alpha$为锐角，所以$2\alpha = \frac{\pi}{6}$。即菱形的锐角为$\frac{\pi}{6}$。

因此，在教学中，尤其在复习教学中，应注意精选题目，加强多解训练，注重引导学生进行解题后再思考，诱导学生从多角度、多方位去认识问题、解决问题，评价各种解法的特点及优劣，寻求最简解题方法，提高效率，培养能力，从而提高数学作业的有效性。

3. 突出核心的作业题

复习课的一个特点是围绕某一核心知识展开，相对应的作业设计也要围绕概念或问题的本质，变换对象的非本质要素，突出对象的本质要素，达到丰富学生的感性认识、梳理知识脉络、掌握概念或问题本质的目的。

例如全等三角形复习课的作业设计：[①]

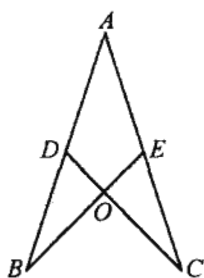
【作业 1】 如图(1)，已知：$AB = AC$，分别取 AB、AC 的中点 D、E，连结 BE、CD 交于 O，求证：$BE = CD$。

【作业 2】 如图(2)，已知：$AB = AC$，分别取 AB、AC 的点 D、E，使得 $AD = AE$，连结 BE、CD 交于 O，求证：$BE = CD$。

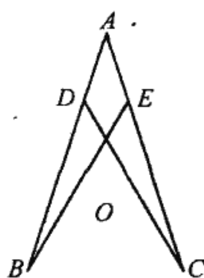
【作业 3】 如图(3)，已知：$AB = AC$，分别取 AB、AC 的点 D、E，使得 $CD \perp AB$，$BE \perp AC$，BE、CD 交于 O，求证：$BE = CD$。

【作业 4】 如图(4)，已知：$AB = AC$，分别取 AB、AC 的点 D、E，使得 $\angle B = \angle C$，BE、CD 交于 O，求证：$BE = CD$。

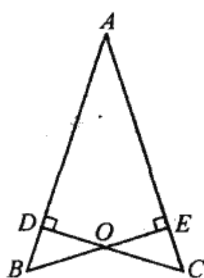
【作业 5】 在作业 1 中，保持条件不变，除了得到线段 BE 与 CD 相等外，还可以得到哪些相等的线段？用什么知识加以证明？



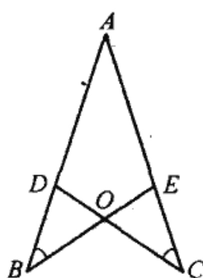
图(1)



图(2)



图(3)



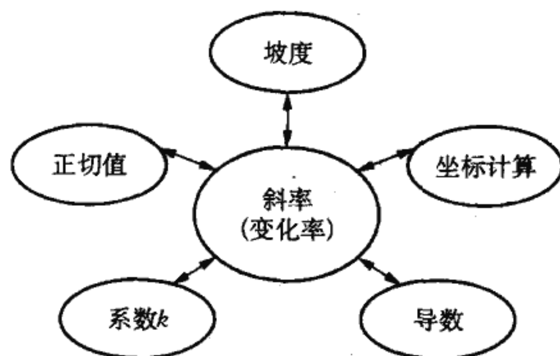
图(4)

本组作业题的特点是围绕一个基本图形，通过变化问题的条件或结论，形成一组"万变不离其宗"的作业题，突出了全等三角形的判定定理 1(SAS)和判定定理 2(ASA)的核心地位，达到激发兴趣、巩固定理、启迪思维的效果。

---

① 孙志远编著. 初中数学课堂教学. 湖南教育出版社，1996 年 11 月

再如直线斜率概念的复习思路可设想为，先通过“坡度”概念类比得出直线的斜率定义，即 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$，再在几何直观下引入倾斜角并导出两者之间的关系：$k=\tan\theta$，进一步揭示两者变化时的情况。这样就能将变化率的思想突显出来，以此为中心，将其他表征形式结合起来，形成了斜率概念的图式（如图所示）。[①]



斜率概念的图式图

对斜率概念的把握需要从多角度入手，数形相结合、解题活动与日常生活实践相结合，加强多种表征方式之间的联系，让学生在螺旋上升的过程中不断加深认识。斜率作业题可设计如下：

【作业1】 在平面直角坐标系中，将过原点的一次函数 $y=kx$ 图象上某点 P 沿 x 轴方向向右平移4个单位，再沿 y 轴方向向上平移3个单位，得到点 Q 仍在原图象上，则系数 $k=$ ________。

【作业2】 在日常生活中，我们用“坡度”来刻画道路的倾斜程度，如楼梯、屋顶、铁路、公路等等。铁路的坡度通常用千分率(‰)来表示，公路坡度用百分率(%)来表示。试回答：



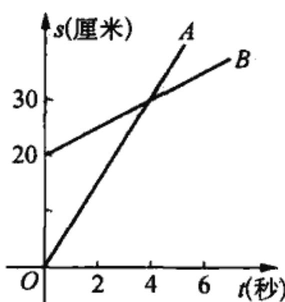
(1) 如图是一段斜坡为7%的山路标记，请解释数值7%的含义。

① 张献峰．高中生对斜率概念的理解．硕士学位论文，华东师范大学，2007年10月

（2）坡度为 9%的道路比这段 7%的山路要陡还是缓？为什么？

（3）请你从数学角度来描述"坡度"一词的含义。

【作业 3】 右图给出了两物体 A 与 B 作匀速直线运动时的位移-时间变化图，请回答：



（1）当 $t=2$ 秒时，比较 A 与 B 的速度 v_A 和 v_B 大小；$t=4$ 秒呢？说明理由；

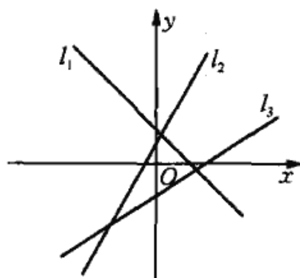
（2）分别求物体 A 与 B 的速度 v_A 和 v_B，并写出简单过程；

（3）在 $s-t$ 图象中，直线表示什么含义？

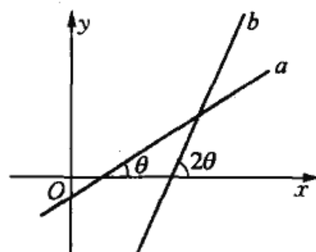
（4）分别求出图中两直线的斜率 k_A 和 k_B，并解释它们的含义。

【作业 4】 在平面直角坐标系中，直线 $x=1$ 的斜率为________，倾斜角________；直线 $y=3$ 的斜率为________，倾斜角为________；经过两点$(-3, 2)$和$(2, -3)$的直线斜率为________，倾斜角为________。

【作业 5】 如图，直线 l_1、l_2 和 l_3 的斜率分别为 k_1、k_2 和 k_3，则 k_1、k_2 和 k_3 的大小关系（从小到大）为________。



图作业 5

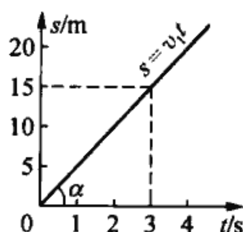


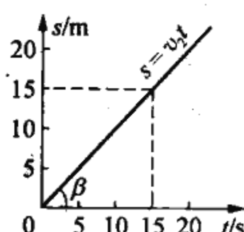
图作业 6

【作业 6】 如图，已知直线 a，b 的倾斜角分别为 θ 和 2θ，其中直线 a 的斜率为 $k_a=\dfrac{1}{3}$，求直线 b 的斜率。

【作业 7】 在中学物理课本中有许多图象，下图是物体甲和乙做匀速直线运动时的 $s-t$ 图象。试回答：

左图中直线的斜率 $k_1=$ ________，





右图中直线的斜率 $k_2 =$ ________。

4. 突出模块的作业题

突出模块的作业设计，主要体现了作业的梳理和评价功能。学业成绩的检查与评定是整个教学过程的有机部分。数学成绩的好坏一般是通过解题来评定的。评定的内容有两方面：一是知识水平，二是能力水平。因此，模块作业设计既要全面体现基础知识掌握情况，又要检测学生的能力水平。下面是二次函数与幂函数模块测试题。

一、填空题

1. 幂函数 $y = x^{\frac{n}{m}}$ 的图象（$m, n \in \mathbf{Z}$，m、n 互质）不过原点，且关于 y 轴对称，则 m、n 为________（同号，异号），且 m 为________，n 为________（偶数，奇数）；

2. 若幂函数 $f(x)$ 的图象经过 $\left(2, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则 $f(4) =$ ________；

3. 函数 $y = (x+2)^{-\frac{2}{3}}$ 的单调增区间为________，其单调减区间为________；

4. 将抛物线 $y = x^2 + 2x - 3$ 上的各点向右移动 2 个单位，再向下移动一个单位，则此时的曲线表示的函数是 $y =$ ________；

5. 对任意实数 t，函数 $f(x)$ 都有 $f(t+2) = f(2-t)$，则 $f(1)$、$f(2)$、$f(4)$ 的大小顺序为________；

6. 函数 $y = |||x|-1|-1|$ 的图象与 x 轴围成的封闭区域的的面积为________；

7. 函数 $f(x)$ 对一切实数 x 都满足 $f\left(\dfrac{1}{2}+x\right) = f\left(\dfrac{1}{2}-x\right)$ 并且方程 $f(x) = 0$ 有三个实根，这三个实根的和为________；

8. 已知函数 $f(x)$同时满足下列四个条件：(1) $f(x+1)$ 的定义域是$[-5, 3]$；(2) $f(x)+f(-x)=0$；(3) $f(-1)=0$；(4)在$[-4, 0)$上单调递减；则不等式 $x^3 f(x)\leqslant 0$ 的解集是________；

9. 若函数 $f(x)$是定义在 R 上的奇函数，且 $f(x)$对任意实数 x 都满足 $f(x+2)=f(x)$，则 $f(2)+f(4)+f(6)+\cdots+f(1994)=$ ________。

二、选择题

10. 在下列函数中，既是奇函数，在区间$(-\infty, 0)$内又是减函数的是(　　)；

(A) $y=x^{\frac{1}{2}}$　　(B) $y=x^{\frac{1}{3}}$

(C) $y=x^{-\frac{2}{3}}$　　(D) $y=x^{-\frac{1}{3}}$

11. 定义在$(-\infty, +\infty)$上的函数 $y=f(x)$ 在$(-\infty, 2)$ 上是增函数，且 $y=f(x+2)$ 图象的对称轴是 $x=0$，则(　　)；

(A) $f(-1)<f(3)$　　(B) $f(0)>f(3)$

(C) $f(-1)=f(-3)$　　(D) $f(2)<f(3)$

12. 若函数 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上是减函数，那么 $f(2x-x^2)$ 的单调增区间是(　　)。

(A) $(-\infty, 1]$　　(B) $[-1, +\infty)$

(C) $(-\infty, -1]$　　(D) $[1, +\infty)$

三、解答题

13. 幂函数 $y=x^{m^2-2m-3}(m\in\mathbf{Z})$ 的图象关于 y 轴对称，且与 x 轴、y 轴均无交点，求幂函数的解析式。

14. 设 $a, b\in\mathbf{R}$，且 $a\neq b$，讨论函数 $y=\dfrac{x+b}{x+a}$ 的单调性。

15. 若函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，当 $x\leqslant 2$ 时，$y=1-x^2$，求当 $x>2$ 时，$f(x)$ 的解析式。

16. 若 $(a+2)^{-\frac{1}{3}}<(1-2a)^{-\frac{1}{3}}$，求实数 a 的取值范围。

17. 已知幂函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}p^2+p+\frac{3}{2}}(p\in\mathbf{Z})$，在$(0, +\infty)$ 上是增函数，且在其定义域内是偶函数。

(1) 求 p 的值，并写出相应的函数 $f(x)$；

(2) 对于(1)中求得的函数 $f(x)$，设函数 $g(x)=-qf(x)+(2q-1)f(x)+1$，问是否存在实数 q $(q<0)$，使得 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,-4]$ 上是减函数，且在区间 $(-4,0)$ 上是增函数？若存在，请求出来；若不存在，请说明理由。

18. 二次函数 $f(x)=x^2+ax+3$，当 $x\in[-2,2]$ 时，$f(x)\geqslant a$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

二、不同训练要求的作业设计

作业是数学训练系统的主要组成部分，不同训练要求的作业设计有着不同的指向。

(一) 知识掌握与技能训练

知识与技能是基础，是学生经历、体验数学过程，形成数学学习方法的媒质；也是形成数学能力，酝酿情感、态度和价值观的载体。知识与技能，是数学教育的基本内容；知识与技能的获得，是学生发展的基本条件。没有知识与技能就没有其他一切，皮之不存，毛将焉附？在数学教育过程中，学生总是从学习具体的知识与技能开始，在具体的数学学习活动中，逐步形成各方面的能力，领悟数学的思考方法和研习方法，培育和发展个体的意识、思想、精神以及观念。“无知者无能”、“无知者无情”就是这个道理。一个人不能“数学地”思考和解决问题的主要原因是缺乏必要的数学知识。

知识掌握与技能训练，要有一个由简到繁、由单一到综合、由基本到变式的发展过程，以保证随着基础知识水平的提高、加深，使技能达到熟练的程度。例如，$y=a\sin x+b\cos x$ 辅助角公式可分为如下层次展开：$y=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\rightarrow y=\sin x+\cos x\rightarrow y=4\sin x+3\cos x\rightarrow y=a\sin x+b\cos x$。又如，指出函数 $f(x)=-x^2+x-6$ 的单调区间 → 指出函数 $f(x)=|-x^2+x-6|$ 的单调区间 → 指出函数 $f(x)=\sqrt{-x^2+x-6}$ 的单调区间 → 指出函数 $f(x)=$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+x-6}$ 的单调区间 → 指出函数 $f(x)=\log_2(-x^2+x-6)$ 的单调区间。

知识掌握与技能训练的作业设计一般以一节课时为单位，围绕某一学习主题展开。以下是二次根式的第二个公式—— $\sqrt{a^2}=|a|$ 的作业设计。

【作业 1】 计算：① $\sqrt{5^2}$；② $\sqrt{(-1.5)^2}$；③ $\sqrt{0^2}$；④ $\sqrt{(-3\times 7)^2}$；⑤ $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$。

【作业 2】 辨析下列各等式能不能成立？为什么？

① $(\sqrt{7})^2=7$；② $(-\sqrt{7})^2=-7$；③ $\sqrt{6^2}=6$；④ $\sqrt{(-6)^2}=-6$。

【作业 3】 计算下列各式的值：

① $(\sqrt{0.8})^2=$________；② $\sqrt{0.8^2}=$________；③ $\sqrt{(-0.8)^2}=$________；④ $-\sqrt{(-0.8)^2}=$________。

【作业 4】 化简：

① $\sqrt{m^2}\ (m<0)$；② $\sqrt{(x-4)^2}\ (x>4)$；

③ $\sqrt{(m-5)^2}\ (m<5)$；④ $b+\sqrt{b^2-2b+1}\ (b<1)$。

【作业 5】 判断下列各式在什么条件下成立？

① $\sqrt{(m-2)^2}=m-2$；② $\sqrt{(n-7)^2}=7-n$。

上述作业设计，围绕公式 $\sqrt{a^2}=|a|$，从简单模仿开始，到采用具体数值及字母的多种形式辨析，最后到字母形式的顺向与逆向变式，帮助学生理解公式 $\sqrt{a^2}=|a|$ 的本质含义，养成一定的数与式运算技能。

（二）优化认知结构

同样勤奋、同样拥有升入重点大学迫切愿望的高中生，为什么数学学习成绩截然不同呢？原因肯定是多方面的，由一般教育研究的结论，我们能推论到数学认知结构的差异应是导致学

生数学认知成绩不同的一个重要原因。[1] 因此，优化学生的数学认知结构是数学教学的重要任务，同样也成为数学作业设计的一个重要目标。

1. 嫁接移植的方法

所谓“嫁接移植”就是以一个知识为主体，而把另一个知识移植到主体知识的一种方法。譬如，学习了余弦定理的代数形式，在适当的时候，可以把正弦定理和复数的知识、向量的知识“移植”过来，就可以分别得到余弦定理的三角形式和余弦定理的复数形式、向量形式。这样，学生就可能对余弦定理的整体结构有了更为深刻的认识，从而也加深对余弦定理本质的认识。

【作业 1】 证明：$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$。

【作业 2】 证明：$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A$。

【作业 3】 证明：$|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2|z_1|\cdot|z_2|\cdot|\cos(\theta_1 - \theta_2)|$。

【作业 4】 证明：$|\vec{a} \pm \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \pm 2\vec{a}\cdot\vec{b}$。

2. 利用表象的方法

表象就是在知觉的基础上所形成的感性形象，具有综合性和整体性的特点。它能对数学对象在心理上形成一个总体形象，让思维一揽子把握住问题的中心与实质。譬如，在求一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集时，通常首先要分 $a > 0$ 和 $a < 0$ 两种情况分别讨论，然后再对判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 分 $\Delta > 0$、$\Delta = 0$、$\Delta < 0$ 三种情况进行讨论，前后一共有六种情况。显然，一一记忆这些解的公式很麻烦。但是，如果把一元二次不等式的解集与一元二次方程的根、一元二次函数的图象紧密结合起来，通过表象来帮助记忆就非常简单且容易贮存了。正如数学家斯蒂恩曾经说过：“如果一个特定的问题可以转化为一个图形，那么思想就整体地把握了问题，并且能够创造性地思索问题的解法。”

---

[1] 张庆林. 高效率教学. 人民教育出版社，2002 年

下面是利用表象解决“不等式恒成立问题”的作业设计：

作　　业	设 计 意 图
【作业 1】 关于 x 的不等式 $x^2+2mx+2>0$ 在 R 上恒成立，求实数 m 的范围。	通过对应的函数图象特征和方程解的情况解决问题。
【作业 2】 关于 x 的不等式 $mx^2+2mx+2>0$ 在 R 上恒成立，求实数 m 的范围。	转化到函数图象特征和方程解的情况，并注意二次项系数讨论，考虑问题全面。
【作业 3】 关于 x 的不等式 $\dfrac{mx^2+2mx+2}{x^2+x+3}<1$ 在 R 上恒成立，求实数 m 的范围。	逆向思维，通过对应方程解的情况判断函数图象特征，得出不等式的解集情况。
【作业 4】 (1) 关于 x 的不等式 $x^2+2mx+2>0$ 在 R 上不恒成立，求实数 m 的范围。 (2) 关于 x 的不等式 $x^2+2mx+2<0$ 在 R 上恒不成立，求实数 m 的范围。	在理解恒成立的基础上理解不恒成立和恒不成立，依然通过对应函数和方程来解决问题，深入体会不等式、函数、方程之间的联系和转化思想。

本作业设计针对学生难以理解的“不等式恒成立问题”，通过四个有联系的作业，层层递进，使学生从中认识到一元二次不等式、一元二次函数、一元二次方程的相互联系，建立“三个二次”的关联，并集中体现在所对应的抛物线这个图象上，形成互相关联“三个二次”的表象，正是借助于这个表象，对字母系数的讨论就迎刃而解，引导学生考虑问题全面、思维严密；也正是在这个表象的帮助下，学生才能理解“不恒成立”和“恒不成立”的本质意义，找出对应函数图象的特征解决问题，从而提高分析问题和解决问题的能力。

3. 概括组织的方法

概括组织是在一组信息中以上位概念代替下位概念或摒弃枝节、提取要义的方式组织学习材料。概括归为五条原则：略去枝节、删除多余、代以上位、择取要义和自述要义。对于数学命题知

识最常用的是“代以上位”这条原则。所谓“代以上位”，就是用一个更一般的命题去代替一系列具体的命题。譬如，学完三角函数的 36 个诱导公式之后，如果不进行进一步的组织加工，那么这些孤立的知识就很难保持和应用。但如果教师引导学生把这些公式放在一起进行观察、比较、分析，最后概括为新的知识组块“奇变偶不变，符号看象限”后，那么学生的数学认知结构就能从整体上得到优化。

例如，帮助小学生抽取基本等量关系的作业设计：[①]

【作业 1】 一批零件 400 个，做了一部分后，还剩下 220 个，做了几个？ $(220 + x = 400)$

【作业 2】 一批零件 400 个，做了 3 天，每天做 60 个，还剩几个？ $(60 \times 3 + x = 400)$

【作业 3】 一批零件 400 个，做了 260 个，剩下的分 5 天完成，平均每天做几个？ $(5x + 260 = 400)$

【作业 4】 一批零件 400 个，做了 3 天，每天做 60 个，剩下的分 5 天完成，平均每天做几个？ $(5x + 3 \times 60 = 400)$

【作业 5】 甲乙两人合做 400 个零件，甲每天做 35 个，乙每天做 45 个，他们共同做几天完成？ $(35x + 45x = 400)$

【作业 6】 甲乙两人合做 5 天完成 400 个零件，甲每天做 35 个，乙每天做多少个？ $(35 \times 5 + 5x = 400)$

【作业 7】 甲乙两人合做 5 天完成 400 个零件，甲做 4 天，乙做 5 天，甲每天比乙多做 28 个，乙每天做多少个？

$$(4(x + 28) + 5x = 400)$$

从这些的列式来分析解题思路，它们所蕴涵的基本等量关系都是“部分数＋部分数＝总数”。虽然这些题目的条件、形式在动态变化，但其基本等量关系是不变的。在这组题目里，问题的呈现方式是随着小学生的不同年龄变化的，作业 1、2、3 适用于低年级，作业

---

① 胡松林. 数学教师札记. 上海教育出版社，1999 年 10 月

5、6、7适用于高年级。但不管在哪个年级段，都要对蕴涵其中的基本等量关系通过不同的题目不断概括提炼，促进学生形成“部分数＋部分数＝总数”的基本观念，达到优化认知结构的目的。

再如，帮助学生总结概括不等式基本性质的作业设计：

【作业1】 判断下列命题的真假，并说明理由。

①若 $a>b$，$c=d$，则 $ac>bd$；②若 $ac<bc$，则 $a<b$；

③若 $\frac{a}{c^2}<\frac{b}{c^2}$，则 $a<b$；

④若 $a<b$，c 为实数，则 $\frac{a}{c^2}<\frac{b}{c^2}$；⑤若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$；

⑥若 $a>b$，$c<d$，则 $a+c>b+d$，$ac>bd$；

⑦若 $a>b$，$c>d$，则 $ac>bd$；

⑧若 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$；

⑨若 $a>b$，$c>d$，则 $a-c>b-d$；

⑩若 $a>b$，则 $a^n>b^n$，$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ $(n\notin \mathbf{N}^*)$

【作业2】 证明下列各题：

① 若 $a>b$，$e>f$，$c>0$，则 $f-ac<e-bc$；

② 若 $a<b<0$，$c<d<0$，则 $ac>bd$；

③ 若 $a>b$，$g<0$，则 $g(a-c)<g(b-c)$；

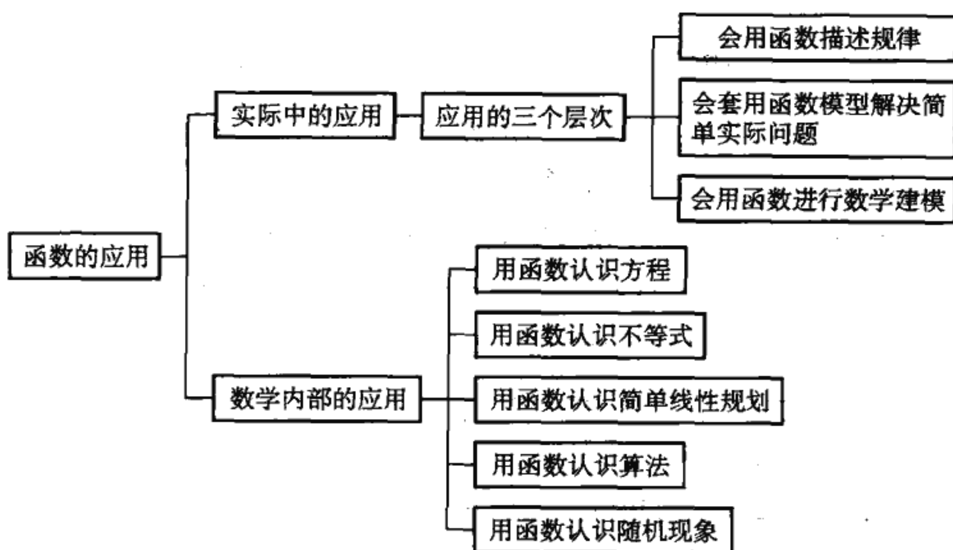
④ 若 $a>b>0$，$c<d<0$，$e<0$，则 $\frac{e}{a-c}>\frac{e}{b-d}$。

【作业3】 根据作业1、作业2总结概括不等式的基本性质、判断命题真假的基本方法。

4. 遵循认知层次的方法

人的认知是有层次性的，特殊到一般、具体到抽象等是一般的认知层次。这种认知层次也表现在具体的数学内容的学习上。例如高中阶段函数应用的层次[①]：

① 王尚志，高中数学课程中的函数，中学数学教学参考（高中版），2007年11月

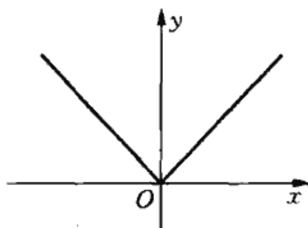


数学发展史表明，函数概念从产生到完善，经历了漫长而曲折的过程。与常量数学相比，函数概念的抽象性更强、形式化程度更高。因此，学习函数要把握概念形成、抽象推理和应用三个层次；对应的，我们在高一数学函数作业的设计中，应体现这三个层次。

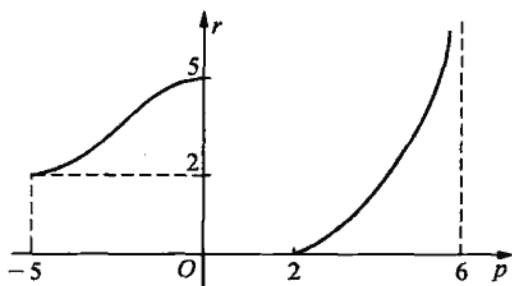
(1) 在函数概念形成阶段，我们可以设计如下作业：

【作业 1】 由图象认识函数概念的作业，如：

① 指出如图所示的图象（函数 $y=|x|$）中变量 x、y 的具有怎样的对应关系。



图①



图②

② 函数 $r=f(p)$ 的图象如上图所示。(i)函数 $r=f(p)$ 的定义域可能是什么？(ii)函数 $r=f(p)$ 的值域可能是什么？(iii)r 的哪些值只与 p 的一个值对应？

③ 画出下列函数的图象：(i) $F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 1, & x>0;\end{cases}$

(ii) $G(n)=3n+1$，$n\in\{1, 2, 3\}$。

【作业 2】 由表格表示函数的作业，如：

① 某射击运动员打靶的序数与函数的对应表：

序号	1	2	3	4	5
环数	8	8	9	10	10

这是一个函数吗？为什么？

② 某地区某日海拔高度与气温的对照表为：

高度 h(米)	0	500	1000	2000
气温 t(℃)	15.00	11.75	8.50	2.00

(i) 根据表中 t 与 h 的对应关系，写出 t 与 h 的函数解析式；

(ii) 根据(i)的结论，求海拔高度 1500 米处的气温。

【作业 3】 由解析式认识函数概念的作业，如：

① 写出函数 $y=2x+1$、$y=\frac{1}{x}$、$y=x^2$、$y=x^2$ $D=\{-2, -1, 0, 1\}$ 的定义域、对应关系、值域。

② 构造一个一次函数 $f(x)$和一个二次函数 $g(x)$，满足 $f(x)\cdot g(x)=x^3-1$。

③ 已知函数 $f(x)=3x^2-5x+2$，求 $f(-\sqrt{2})$，$f(-a)$，$f(a+3)$，$f(a)+f(3)$ 的值。

④ 已知 $f(x)=\begin{cases}2x(3+x), & x\geqslant 0,\\ 2x(3-x), & x<0,\end{cases}$ 求 $f(2)$，$f(-4)$，$f(-a)$ 的值。

⑤ 若 $f(x)=x^2+ax+b$ 且 $f(1)=0$，$f(3)=0$，求 $f(-1)$ 的值。

⑥ 已知函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{x-6}$，(1)点(3，14)在 $f(x)$ 的图象上吗？(2)当 $x=4$ 时，求 $f(x)$ 的值；(3)当 $f(x)=2$ 时，求 x 的值。

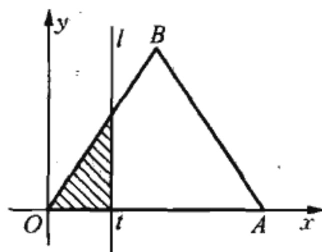
【作业 4】 由具体问题建立函数关系的作业，如：

① 已知上海到北京的路程为 1318 千米，高速火车以每小时 300 千米的速度，由上海开往北京。试用解析式将火车离开北京的距离 s(千米)表示成行驶的时间 t(小时)的函数。

② 等腰三角形的周长为 12 厘米，试用解析式将该等腰三角形的一条腰长 y(厘米)表示成底边长 x(厘米)的函数。

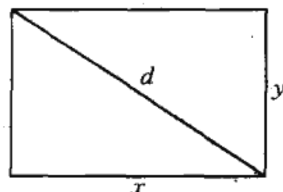
③ 为分流短途乘客，减缓轨道交通高峰压力，上海地铁实行新的计费标准。新标准的分段计程制度如下：0～6 公里(含 6 公里)3 元；6～16 公里(含 16 公里)4 元；16 公里以上每 6 公里递增 1 元，但总票价不超过 8 元。(1)试作出票价 y(元)关于路程 x(公里)的函数图象；(2)某人买了 5 元的车票，他途经路程不能超过多少公里？

④ 如图，在直角坐标系的第一象限内，$\triangle OAB$ 是边长为 2 的等边三角形，设直线 l：$x=t\ (0\leqslant t\leqslant 2)$ 截这个三角形所得位于直线左侧的图形的面积为 S，求函数 $S=f(t)$ 的解析式。



⑤ 某商场对顾客实行购物优惠活动，规定一次购物付款总额：(1)如果不超过 500 元，则不予优惠；(2)如果超过 500 元但不超过 1000 元，则按标价给予 9 折优惠；(3)如果超过 1000 元，其 1000 元按(2)给予优惠，超过 1000 元的部分给予 7 折优惠，若设一次购物付款总额为 x 元，优惠后实际付款额为 y 元，试写出用 x 表示 y 的函数关系式。

⑥ 如图所示，矩形的面积为 10，如果矩形的长为 x，宽为 y，对角线为 d，周长为 l，那么你能获得关于这些量的哪些函数？



这样的作业设计有助于学生在函数概念

的学习中，能进行数形结合的思维运算，进行符号语言与图形语言的灵活转换，克服数与形割裂的倾向，使学生在理解函数概念时，形成一个情景(解析式的、表格的或图形的)，使得函数的对应法则能够得到形象的、动态的反映。因为函数是对应法则、定义域、值域的统一体，学习函数应当领会它们之间的相互制约关系，对三者进行整体把握，从而抽象地、动态地、相互联系地把握整个动态过程，促进学生的思维在静止与运动、离散与连续之间进行转化，从形式逻辑思维向辩证逻辑思维转化。

(2) 在函数概念的抽象推理阶段，我们又可以设计如下作业(以函数的单调性为例)：

【作业 1】 利用单调性概念判断的作业，如：

已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为$[0,+\infty)$，若对任意的 $x>0$，都有 $f(x)<f(0)$。问函数 $y=f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上是否一定是减函数？

【作业 2】 利用单调性概念证明的作业，如：

① 求证函数 $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+1 \quad x\in[0,+\infty)$ 是减函数；

② 求证函数 $f(x)=x-\frac{1}{x} \quad x\in(-\infty,0)$ 是增函数；

③ 设函数 $f(x)=\frac{ax^2+1}{bx}$(其中 $a,b\in\mathbf{Z}$)，满足 $f(1)=2$，$f(2)<3$。求函数表达式，判断并证明 $f(x)$ 的单调性。

【作业 3】 利用单调性概念证明并讨论的作业，如：

① 判断函数 $f(x)=2x+\frac{2}{x} \quad x\in\left[\frac{1}{2},3\right]$的单调性，并求出它的单调区间；

② 已知 a 为不等于零的实常数，试讨论函数 $f(x)=\frac{a}{1-x^2}$ 在区间$(0,1)$ 上的单调性。

【作业 4】 利用函数的单调性、形数结合等解决问题的作业，如：

① 函数 $y=f(x)$ 在定义域 R 上单调递增，且有 $f(2a^2+a+1)<f(3a^2+2a+1)$，求实数 a 的取值范围。

② 如果函数 $y=x^2-2mx+1$ 在 $(-\infty, 2]$ 上是减函数，则实数 m 的取值范围是________。

③ 函数 $y=f(x)$ 的图象先右移 2 个单位，再下移 1 个单位得到函数 $g(x)=x^2-4x+3$，判断函数 $2f(x)-g(x)$ 的单调性。

④ 若 $f(x)$ 是偶函数，且在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数，又 $f(-3)=0$，则 $f(x)<0$ 的解集是________。

⑤ 当函数 $f(x)=$ ________ 时，函数 $f(x)$ 同时满足以下三个条件：函数 $f(x)$ 不是偶函数；在区间 $(-\infty, -1)$ 上是减函数；在区间 $(0, 1)$ 上是增函数。（写出一个你认为正确的函数解析式）

这样的设计意图是提供给学生一个从具体到抽象的转化过程，展现函数单调性这一知识的发生过程；也希望教师结合这一学习内容，在作业格式的规范性、解题步骤的条理性、语言叙述的简洁性等方面对学生提出严格的要求，训练和提高学生的逻辑推理能力，实现学生对函数单调性的本质理解。

(3) 在函数概念的应用阶段，我们还可以设计如下作业：

【作业 1】 体现研究函数一般方法的作业，如：

① 画出函数 $y=x^2-2\cdot|x|$ 的图象，并写出它的定义域、奇偶性、单调性、最小值。

② 研究函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的定义域、奇偶性、单调性、最大值。

③ 研究函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}$ $(a>0)$ 的定义域、奇偶性、单调性。

④ 指出函数 $f(x)=ax^2+\dfrac{b}{x^2}$ (a, b 是正常数）所具有的基本性质，当 $a=\dfrac{1}{4}$, $b=4$ 时画出函数的简图。

【作业 2】 利用函数知识解决实际问题的作业，如：

① 某租赁公司拥有汽车 100 辆，当每辆车的月租金 3000 元时，

可全部租出，当每辆车的月租金每增加 50 元时，未出租的车将会增加一辆，租出的车辆每月需要维修费 150 元，未租出的车辆每月需要维修费 50 元。第一问：当每辆月租金定为 3600 元时，能租出多少辆车？第二问：当每辆月租金定为多少元时，租赁公司的月收益最大？最大月收益是多少元。

② 已知某船的最大船速是 48 海里/小时，船每小时使用的燃料费用和船速的平方成正比，当船速为 30 海里/小时，它的燃料费用为 600 元，其余费用(不论船速为多少)都是每小时 864 元，甲乙两地相距 100 海里，船从甲地行驶到乙地。第一问：试把船每小时使用的燃料费用 P(元)表示成船速 v(海里/小时)的函数；第二问：试把船从甲地到乙地所需的总费用 y 表示成船速 v(海里/小时)的函数；第三问：当船速为每小时多少海里时，船从甲地到乙地所需的总费用最少？

函数是非常重要的“数学建模”工具，现实中的许多问题都是通过建立函数模型而得到解决的。同时，在解决实际问题的过程中，学生对函数概念以及与它相关的变量、代数式、方程等知识都能够加深理解。在这个过程中，学生不但可以体会到，精确的函数知识可以为实践中做出科学决策提供有力依据，而且还可以体会到，精确的函数知识应用于实践时，常常要根据具体问题选择相应的函数表示方式，并根据问题的发展进程做出适当的调整。显然，对函数概念的这一角度的理解，是难以从纯粹的函数理论学习中获得的。当然，在这一过程中，学生还获得了与函数问题密切相关的关于收集数据以及分析研究数据之间关系的经历，这对于提高学生的数学能力是大有好处的。

(三) 领悟思想方法

数学思想是对数学知识的本质认识，是对数学规律的理性认识，是从某些具体的数学内容和对数学的认识过程中提炼上升的数学观点，它在认识活动中被反复运用，带着普遍的指导意义，是建立数学问题和用数学解决问题的指导思想。数学方法是指在数学地

提出问题、解决问题（包括数学内部问题和实际问题）过程中，所采用的各种方式、手段、途径等，其中包括变换数学形式。数学思想和数学方法既有联系又有区别，数学思想是对一类数学方法的抽象概括，数学方法是数学思想的表现形式，强调指导思想时称为数学思想，强调操作过程时称为数学方法。

数学思想方法是有层次性的，第一层次是与某些特殊问题联系在一起的方法，通常称为“解题术”；第二层次是解决一类问题时采用的共同方法，称为“解题方法”；第三层次是数学思想，这是人们对数学知识以及数学方法的本质认识，在数学研究范围的拓展、研究对象的延伸、数学方法的形成、各种方法之间的融合并发展成新的方法等中都体现出数学思想的核心作用；第四层次是数学观念，这是数学思想方法的最高境界，是一种认识客观世界的哲学思想。数学思想方法是对数学知识本质特征的反映，它蕴含于数学基本知识的发展和应用的过程中，它是反复使用、长期思索的结果。

学生数学思想方法的形成和发展呈现“潜意识、明朗、形成、深化”四个阶段。这决定了数学思想方法的教学是一个长期的过程，既要注意学生的思维发展水平，量力而行，又要经常渗透、挖掘、形成和应用，螺旋上升。

数学思想方法的涵义、层次特点以及形成方式告诉我们，在设计数学作业时要透过具体的数学习题内容，看到思想方法这条主线，以此为纲，串起日常的学生数学作业，使学生在平时的作业训练中领悟数学思想方法。

我们以数形结合的数学思想方法渗透为例，说明在具体数学内容学习中如何进行相应的作业设计。所谓数形结合的思想方法，就是在研究数学问题时，由数思形、以形思数、数形结合考虑问题的一种思想方法。解析几何是数形结合思想体现的典范。

1. 解析几何的基本思想

解析几何是用代数方法研究几何图形的一门科学，“几何图形代数化与代数结果几何化”是解析几何的基本思想。

图形问题代数化是解析几何的核心。用坐标表示点的观点和用方程表示曲线的观点在代数几何之间架起了一座桥梁，使两种数学形式根据需要可以"互化"，同时还把变数引入了数学，把辩证法引入了数学，是数学史上划时代的里程碑，深刻认识和理解这两个观点是学习解析几何的最高境界。

解析几何中代数运算具有明确的几何意义。在进行代数运算时，一定要时时处处再现其几何意义，这样做将会更深刻地理解解析几何的基本思想。

2. 基本思想的酝酿阶段

小学初中阶段两种数学形式的"互化"：

实数←→数轴；

点 P←→一维坐标 $P(x)$→两点间距离 $|AB|=|X_1-X_2|$；

射线←→一元不等式 $X\geqslant a$；

线段←→一元不等式组 $X_1\leqslant X\leqslant X_2$；

平面上点 P←→二维坐标 (x, y)→两点间距离 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。

3. 基本思想的明朗阶段

有向线段←→有向线段的数量 $\overrightarrow{AB}=X_2-X_1$→有向线段的定比分点；

平面上直线（包括射线、线段）←→…；

平面上曲线（包括圆、椭圆、双曲线、抛物线）←→…；

平面区域←→…。

4. 基本思想的形成阶段

曲线的几何特征与方程的代数特征的统一（曲线与方程的定义）；

知曲线求方程，再用方程研究曲线性质；

知方程画曲线，再用曲线研究方程性质。

5. 基本思想的深化阶段

平面曲线（包括圆、椭圆、双曲线、抛物线）的专题讨论；

方程思想的渗透；

函数思想方法的渗透；

用等价反映轨迹条件的思想，求轨迹方程；

类比与推广。

6. 数形结合思想方法渗透的作业设计

(1) 初中八年级《一次函数》的作业设计

题　　目	意　　图
【作业 1】 设一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过第一、二、三象限，则 k、b 满足条件：(A) $k>0$，$b>0$；(B) $k>0$，$b<0$；(C) $k<0$，$b>0$；(D) $k<0$，$b<0$。	以形思数： 第 3 题
【作业 2】 已知一次函数 $y=3x+m-2$ 的图象不经过第二象限，则 $m=$ ________。	
【作业 3】 根据一次函数 $y=-3x-5$ 的图象回答(1)当 x 为何值时，$y>0$；(2)当 x 为何值时，$y=0$；(3)当 x 为何值时，$y<0$。	
【作业 4】 求由一次函数 $y=2x-3$、$y=-\frac{1}{2}x+7$ 的图象和 x 轴所围成的三角形的面积。	由数思形：由函数解析式(方程)求交点，再由交点坐标求三角形面积，初现用"数"研究"形"思想。
【作业 5】 一个由三位教师以及 x 个学生组成的团队欲去某地旅游。甲旅行社的收费标准是：如果购买 4 张全票，则其余人按半价优惠；乙旅行社的收费标准是：按团体票优惠，按原价的 $\frac{2}{3}$ 收费。这两家旅行社的原价均为每人 a 元。试比较随学生人数的变化，哪家旅行社的收费总额更优惠？	建立一次函数模型，画出其图象，再由图象结合交点作出判断，数形结合地解决问题。

(2) 高二年级解析几何的作业设计

作业的设计意图是，使学生通过以下的作业操作训练，经历曲线的几何特征与方程的代数特征相统一的过程，体会到解析几何中

的代数运算具有明确的几何意义。在进行代数运算时，一定要时时处处再现其几何意义，这样做将会更深刻地理解解析几何的基本思想，体验“数缺形时少直觉，形缺数时难入微”的思想境界。

【作业 1】 参数方程 $\begin{cases} x = 1 + 4\cos\theta, \\ y = 2 + 4\sin\theta \end{cases}$ (θ 是参数)，$\begin{cases} x = 1 + 4\cos\theta, \\ y = 2 + 5\sin\theta \end{cases}$ (θ是参数)，表示的曲线分别是__________。

设计意图：数值 1、2 与圆心(中心)对应，4 与半径对应等，体现曲线的几何特征与方程的代数特征的统一。

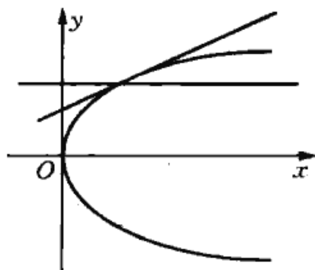
【作业 2】 已知C_1：$\frac{(x-a)^2}{2}+y^2=1$和C_2：$y^2=\frac{1}{2}x$，当C_1和C_2有公共点时，求实数a的取值范围。

设计意图：通过结合图形帮助挖掘隐含条件$x \geqslant 0$，既可弥补代数运算抽象之不足，又可校正可能出现的代数运算错误。

【作业 3】 当a为何值时，曲线$y=x^2$与$x^2+(y-a)^2=1$没有公共点？有一个公共点？有两个公共点？有三个公共点？有四个公共点？

设计意图：本题利用方程所对应的曲线的运动变化可以容易地得到结论，但难以给人以信服感，正所谓“形缺数时难入微”，而以图形运动为线索，也可使代数推理清晰明了，不迷失方向，避免“数缺形时少直觉”的尴尬。

【作业 4】 求经过点(0, 2)且与曲线$y^2=4x$仅有一个公共点的直线的方程。



设计意图：严谨细微的代数推理与直观的几何定性判断相一致，正是说明了“数形结合百般好”。

【作业 5】 求经过点$A(-2, -4)$，且与直线l：$x+3y-26=0$相切于点$B(8, 6)$的圆的方程。

解法一：如图 1，设圆心为 $C(a, b)$，半径为 r，则圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$。

因为 $|CA|=|CB|$，$CB\perp l$，

所以 $\begin{cases}\sqrt{(a+2)^2+(b+4)^2}=\sqrt{(a-8)^2+(b-6)^2},\\ \dfrac{b-6}{a-8}=3,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=\dfrac{11}{2},\\ b=-\dfrac{3}{2},\end{cases}$ 所以 $C\left(\dfrac{11}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$，

$r=\sqrt{\left(\dfrac{11}{2}+2\right)^2+\left(-\dfrac{3}{2}+4\right)^2}=\dfrac{\sqrt{250}}{2}$，

所以圆方程为 $\left(x-\dfrac{11}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{125}{2}$。

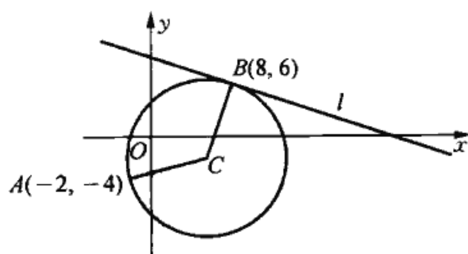


图 1

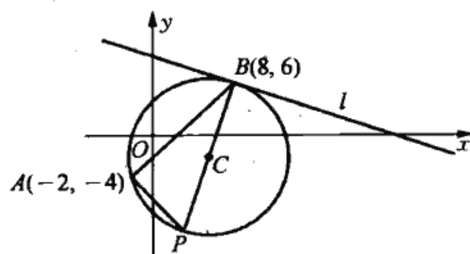


图 2

解法二：如图 2，设圆心为 C，则 $CB\perp l$，所以直线 CB 的斜率为 $k_{CB}=3$，直线 CB 的方程为

$$3x-y-18=0。\quad ①$$

设直线 CB 与圆的另一个交点为 P，连接 AP，AB，则 $AP\perp AB$，因为 AB 的斜率为 $k_{AB}=\dfrac{6-(-4)}{8-(-2)}=1$，所以直线 AP 的斜率为 $k_{AP}=-1$，所以直线 AP 的方程为

$$x+y+6=0。\quad ②$$

联立①②，可以得到 P 点的坐标为 $(3, -9)$，因为 C 是 BP 的中

点，所以 C 点的坐标为 $\left(\frac{11}{2}, -\frac{3}{2}\right)$，以下同解法一。

解法三：设圆的方程是 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$，则

由 $CB \perp l$，$A(-2, -4)$，$B(8, 6)$ 在圆上，得

$$\begin{cases}(-2)^2 + (-4)^2 - 2D - 4E + F = 0, \\ 8^2 + 6^2 + 8D + 6E + F = 0, \\ \left[\left(-\frac{E}{2} - 6\right) \div \left(-\frac{D}{2} - 8\right)\right] \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1,\end{cases} \text{解得} \begin{cases}D = -11, \\ E = 3, \\ F = -30,\end{cases}$$

所以所求圆方程为 $x^2 + y^2 - 11x + 3y - 30 = 0$。

设计意图：题中用了三种方法求解圆的方程，第一、二种方法是应用圆的标准方程，从圆的几何性质如切线性质出发，求出圆的圆心坐标及半径长度，方法三是应用圆的一般方程，运用待定系数法求出相应的系数 D、E、F 的值。解决圆的有关问题时，与圆的几何性质相结合常能得到简单的解法。圆的标准方程在数形结合思想的光芒照耀下，显现出完美的几何性质。

（四）培养探究能力

数学探究能力是对数学问题能在试验、猜想、合情推理的基础上，进行探索和研究，并予以证实；在新的情景中，能正确地表述数量关系和空间形式，并能在创造性地思考问题的基础上，对一些问题得出一些新颖的结果。

1. 布置开放型作业

数学开放题由于条件、结论或解法的不确定性，使得一题多解、一题多变、答案多样；数学开放题既考察学生的基础知识，又考察综合素质能力；数学开放题能够激发解题主体的发散性思维，而且不同水平的学生都能上手。通过尝试解决数学开放题，能够帮助学生体验数学智力活动带来的欢乐、科学女皇赋予数学的美感。

关于数学开放题的功能，国内外对此有如下研究：

美国加利福尼亚州教育部于 1989 年指出了开放性问题的五个功能：①为学生提供了自己进行思考并用他们自己的数学观来表达

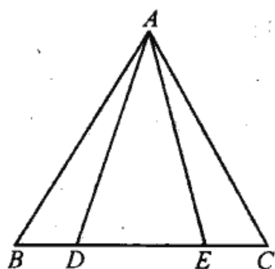
的机会，这和他们的数学发展是一致的。②要求构建他们自己的反应，而不是选择一个简单的答案。③允许学生表达他们对问题的深层次的理解，这在多项选择中是无法做到的。④鼓励学生用不同的方法来解决问题，反过来提示老师用不同的方法解释数学概念。⑤开放性问题的模式是数学课堂教学的基本成份。

我国的数学教育工作者经过教学试验和理论研究，认为数学开放题有以下几方面的作用：①开放题能引起学生认知的不平衡，为学生主动选择信息，超越所给定的信息留下了充分的余地，有利于完善学生的认知结构。②开放题由于具有结果开放、方法开放、思路开放等特点，能有效地反映高层次思维，为高层次思维创造条件，因而能更好地培养学生独立思考和探索精神，培养学生创造意识与能力。③开放题有助于培养学生对数学的积极态度，调动学生学习的积极性，提高平常数学成绩较差学生的数学学习兴趣，帮助学生体验智力活动的欢乐，体验数学学科的灵感。④开放题是挖掘、提炼数学思想方法，充分展示应用数学思想方法的良好载体，使每个学生的数学才能在自己的基础上有一个最大的发展，体现受教育者公平和人人有份的原则。⑤开放性问题的研究和教学，有利于教师转变教育观念，激发教育热情，摆脱一种浅层次的教学循环，体现教师自身的生命活力。

数学开放题以其新颖的问题内容、生动的文体形式和问题解决的发散性，给解题者发挥创造性思维提供了广阔空间，为培养解题者的创造能力提供了良好的载体。例如：多项式 $4x^2+1$ 加上一个单项式后，使它能成为一个整式的完全平方，那么加上的单项式可以是________（填上一个你认为正确的即可）。本题的答案不止一个，大部分学生都能想到 $4x$，也有学生能想到 $4x^4$，问题还可以进一步修改，比如：如果把条件中的单项式、整式改为代数式，答案还有什么？这对于锻炼学生的全面思维能力是大有好处的。因此，数学作业里应该有数学开放题的地位和作为。

【作业 1】 等边与等角的关系

(1) 引子问题：



如图，已知点 D、E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，$AB = AC$，$AD = AE$。

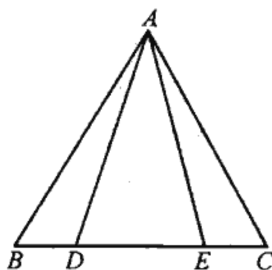
求证：$BD = CE$。

（2）结论开放题：

如图，已知点 D、E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，$AB = AC$，$AD = AE$。从已知条件你可以得到哪些结论？

答案有：① $\triangle ABD \cong \triangle ACE$；② $\triangle ABE \cong \triangle ACD$；③ $\angle BAE = \angle CAD$；④ $\angle BAD = \angle CAE$；⑤ $\angle B = \angle C$；⑥ $\angle ADE = \angle AED$；⑦ $\angle ADB = \angle AEC$；⑧ $BD = CE$；⑨ $BE = CD$。

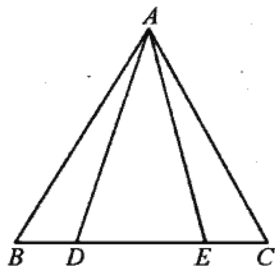
（3）条件开放题：



如图，已知点 D、E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，$AB = AC$，要证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$，只要补充一个条件，问可补充什么条件（图中不添加辅助线和其他字母）？

答案有：① $AD = AE$；② $BE = CD$；③ $BD = CE$；④ $\angle BAE = \angle CAD$；⑤ $\angle BAD = \angle CAE$；⑥ $\angle ADE = \angle AED$；⑦ $\angle ADB = \angle AEC$；⑧ $\triangle ABD \cong \triangle ACE$；⑨ $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACE}$；⑩ $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ACD}$。

（4）条件与结论结合开放题：



如图，已知点 D、E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，现有四个论断：① $AB = AC$；② $AD = AE$；③ $BE = DC$；④ $\angle BAD = \angle CAE$。

（i）请你从中选出 2 个论断作为题设，另外 2 个论断作为结论，组成一个真命题，你选的条件是________，结论是________。

（ii）证明你所组成的真命题。

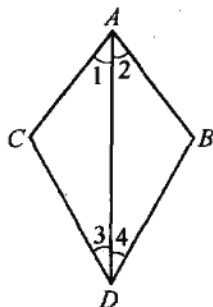
答案有：条件①、②，结论③、④；条件①、③，结论②、④；条件①、④，结论②、③；条件②、③，结论①、④；条件②、④，结论①、

③;条件③、④,结论①、②。

【作业 2】 三角形全等

(1) 引子问题:

如图,已知 $\angle 1 = \angle 2$, $AC = AB$。求证:$\triangle ACD \cong \triangle ABD$。



(2) 结论开放题:

如图,已知 $\angle 1 = \angle 2$, $AC = AB$。从已知条件你可以得到哪些结论?

(3) 条件开放题:.

如图,已知 $\angle 1 = \angle 2$,只要再添加一个条件就可以证明 $\triangle ACD \cong \triangle ABD$,请问这个条件可以是什么?

(4) 条件与结论结合开放题:

如图,现有 5 个论断:① $\angle 1 = \angle 2$, ② $\angle 3 = \angle 4$, ③ $\angle C = \angle B$, ④ $AC = AB$, ⑤ $CD = BD$。请你从中选出 2 个论断作为题设,另外 3 个论断作为结论,组成一个真命题,你选的条件是________,结论是________。

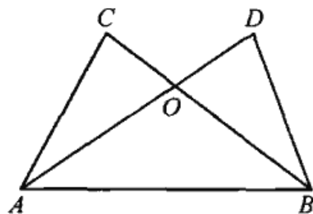
答案有:

条件①、②,结论③、④、⑤;条件①、③,结论②、④、⑤;

条件①、④,结论②、③、⑤;条件②、③,结论①、④、⑤;

条件②、⑤,结论①、③、④;条件④、⑤,结论①、②、③;

【作业 3】 将下列封闭题转化为开放题:

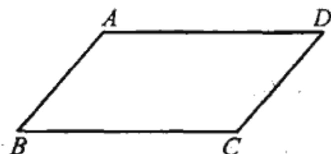


如图,已知 $\angle CAB = \angle DBA$, $AC = BD$, AD、BC 相交于 O。

求证:$OD = OC$。

【作业 4】 平行四边形

(1) 已知:如图,四边形 $ABCD$,仅从下列条件中任取两个加以组合,能否得出四边形 $ABCD$ 是平行四边形的结论?



① $AB \parallel CD$，② $BC \parallel AD$，③ $AB = CD$，④ $BC = AD$。

所有组合共有 $C_4^2 = 6$ 种：

(i) 两组对边分别平行(①②)；

(ii) 两组对边分别相等(③④)；

(iii) 一组对边平行且相等(①③)(②④)。

以上三种情况都可判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形。

(iv) 一组对边平行，另一组对边相等(①④，②③)。

此种情况不能判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形，反例：等腰梯形。

(2) 进一步，若将题中条件增加两个：⑤ $\angle A = \angle C$；⑥ $\angle B = \angle D$，则原题的答案有 $C_6^2 = 15$ 种：

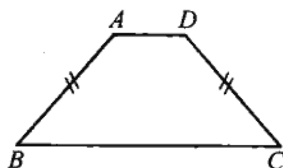
(i) 两组对边分别平行(①②)；(ii) 两组对边分别相等(③④)；(iii) 两组对角分别相等(⑤⑥)；(iv) 一组对边平行且相等(①③)(②④)；(v) 一组对边平行，一组对角相等(①⑤)，(①⑥)，(②⑤)，(②⑥)。

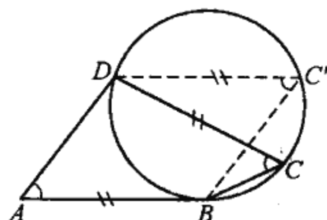
以上五种情况均可判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形。

(vi) 一组对边平行，另一组对边相等(①④)，(②③)；

(vii) 一组对边相等，一组对角相等(③⑤)，(③⑥)，(④⑤)，(④⑥)；

(vi)、(vii)两种情况不能判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形，反例如下图：





【作业 5】 三角形面积的三等分问题

已知△ABC，将它分成面积相等的三个多边形(即由若干首尾相连的线段所围成的平面封闭图形)，你能给出几种不同的分法？

本题的解法很多，无终极答案。以下是常见的几类思考方法：

思考一：如图 1，在 BC 边上取点 D，使 $BD=\frac{1}{3}BC$，联结 AD，则 $\triangle ABD$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的三分之一；将 $\triangle ADC$ 分成面积相等的三角形（或多边形），例如作出 $\triangle ADC$ 的任一条中线即可。

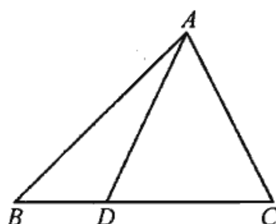


图 1

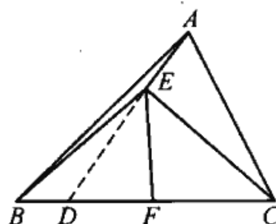


图 2

思考二：如图 2，在 BC 边上任取点 D，联结 AD，并在 AD 截取 $AE=\frac{1}{3}AD$；联结 BE，CE，则多边形 $ABECA$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的三分之一；将 $\triangle EBC$ 分成面积相等的三角形（或多边形），例如作出 $\triangle EBC$ 的中线 EF；又如图 3，在 BE 截取 $EM=\frac{3}{4}EB$，在 CE 截取 $EN=\frac{2}{3}EC$，联结 MN，则 $\triangle EMN$ 与四边形 $MBCN$ 等积。

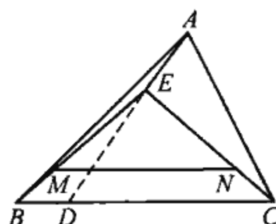


图 3

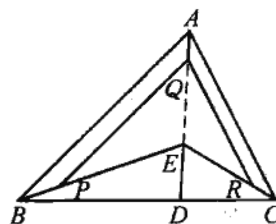


图 4

思考三：如图 4，在 BC 边上任取点 D，联结 AD，并在 AD 截取 $DE=\frac{1}{3}AD$；联结 BE，CE，则 $\triangle EBC$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的三分之一。将多边形 $ABECA$ 的面积等分。比如在 AE 截取 $QE=\frac{\sqrt{2}}{2}AE$，

作 $QP \parallel AB$ 交 BE 于 P，作 $QR \parallel AC$ 交 CE 于 R，则多边形 $ABPQRCA$ 与多边形 $QPERQ$ 等积。又如图 5，在 AE 截取 $AF=\frac{3}{4}AE$，在 AB 截取 $AG=\frac{2}{3}AB$，在 AC 截取 $AH=\frac{2}{3}AC$，联结 HF，FH，则多边形 $AGFHA$ 与多边形 $GBECHFG$ 等积。此处的特例是 E 点恰好是 $\triangle ABC$ 的重心，此时，$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle BCE}=S_{\triangle CAE}$。

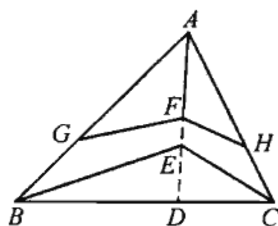


图 5

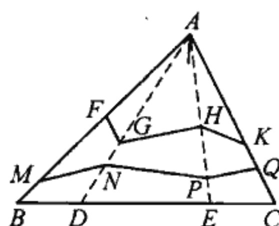


图 6

思考四：如图 6，在 BC 边上任取两点 D、E，联结 AD、AE；任取四个实数 λ_1，λ_2，μ_1，μ_2，使其满足 $0<\lambda_1<\lambda_2<1$，$0<\mu_1<\mu_2<1$，$\lambda_1\mu_1=\frac{1}{3}$，$\lambda_2\mu_2=\frac{2}{3}$；(如 $\lambda_1=\frac{1}{2}$，$\lambda_2=\frac{8}{9}$，$\mu_1=\frac{2}{3}$，$\mu_2=\frac{3}{4}$ 就满足上述条件)。在 AB 截取 $AF=\lambda_1 AB$，$AM=\lambda_2 AB$，在 AD 截取 $AG=\mu_1 AD$，$AN=\mu_2 AD$，在 AE 截取 $AH=\lambda_1 AE$，$AP=\lambda_2 AE$，在 AC 截取 $AK=\mu_1 AC$，$AQ=\mu_2 AC$，联结 FG，GH，HK，MN，NP，PQ，则利用三角形面积公式 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 可以证明 $S_{多边形AFGHKA}=S_{多边形FMNPQKHGF}=S_{多边形MBDECQPNM}$。

本题有多种反映不同思维水平的解法，即使对于基础较差的学生，想出一二种分法也不会太难；而对于基础好、爱好思考的学生，则尽可以充分利用自己掌握的知识和方法，发挥想象的翅膀、创造的思维给出许多有趣的分法。

【作业 6】 有关几何图形的面积分割问题

(1) 引子问题：

如图 1，有一块梯形形状的土地，要平均分配给两个农户种植，

请设计两种分割方案，并给予合理解释。

这是一道结论开放题，没有指出方向。看似非常开放，但学生的思路很可能是狭窄的。大多数学生的直觉就是作上下底中点的连线 EF（如图 2）。或许有些学生会从梯形的面积公式上得到启发：在上下底上各取一点 M，N，使 $AM+BN=DM+CN$，直线 MN 能等分梯形面积（如图 3）。

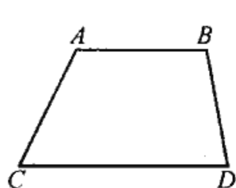


图 1

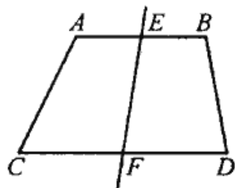


图 2

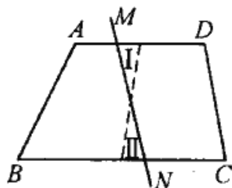


图 3

（2）比较反思：比较这两种方案，它们的分割线有什么共同特点？学生的思维就会被导向深入，也会有新的发现：①分割线都是直线；②实质上都是使分割所得的两个梯形的上下底之和相等；③分割线都经过线段 EF 的中点（也即梯形中位线的中点）；④分法二实质上是把分法一的Ⅰ、Ⅱ两个部分的面积进行如此一“收”，学生的思路便豁然开朗。经过线段 EF 中点，有无数条类似的直线（M 或 N 可以与顶点重合）都可等分该梯形的面积；也可能联想到梯形的另一个面积公式“中位线×高”，只需找出中位线的中点，过中位线的中点作一条直线截上下底即可。“收”，是为更彻底的“放”。

（3）探究发散：学生的思维得到充分发散后，再将其引向更高层面：是否存在与两腰都相交，能把梯形面积二等分的直线？学生经历了以上的探究，应该会有一定的数学直觉：如果在腰 AC 上固定一点 P，则在腰 BD 上一定可以找到相应的一点 Q，使得直线 PQ 分割梯形，且 $S_1=S_2$（如图 4）。类似地，这样的直线也可以找到无数条。

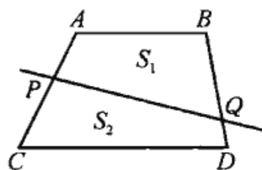


图 4

（4）进一步发散：除了直线，还能用其他类型的线把梯形面积二

等分吗？经过适度地“放”、及时地“收”，让学生的思维达到最大限度的提升，他们会想到折线、曲线、组合线(如图 5，图 6，图 7，图 8)……

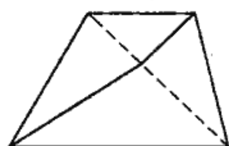
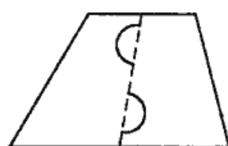

图 5


图 6


图 7


图 8

【作业 7】 等差、等比数列的证明

(1) 引子问题：

① 填空：$\{a_n\}$ 是等差数列 $\Leftrightarrow$ $\underline{a_n - a_{n-1} = d\ (n \geqslant 2)}$ $\Leftrightarrow$ $\underline{2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}(n \geqslant 2)}$。

$\{a_n\}$ 是等比数列 $\Leftrightarrow$ $\underline{\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q}$ $\Leftrightarrow$ $\underline{a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}(n \geqslant 2)}$。

② 已知$\{a_n\}$、$\{b_n\}$是等差数列，有一数列：$d_n = a_n + b_n(n = 1, 2, \cdots)$，问：$\{d_n\}$ 是否是等差数列？为什么？

(2) 已知$\{a_n\}$、$\{b_n\}$是等差数列，还可以得到什么样的新数列，使其为等差数列？

① $\{a_n - b_n\}$、$\{m \cdot a_n\}$、$\{Aa_n + B\}$、$\{Aa_n + Bb_n\}$ 都是等差数列；$\{m^{a_n}\}(m > 0)$ 是等比数列；

② $\{a_{2n}\}$、$\{a_{2n-1}\}$、$\{a_{b_k}\}$($\{b_k\}$ 是等差数列)、$\{a_{2n} + a_{2n-1}\}$ 是等差数列，数列 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1$ 是等差数列。

(3) 类似地，把$\{a_n\}$、$\{b_n\}$换成等比数列，可以得到什么样的结论？

① $\{a_n \cdot b_n\}$，$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$，$\{ma_n\}(m \neq 0)$，$\{a_n^m\}(a_n > 0)$ 是等比数列；

② $\{a_{c_k}\}$($\{c_k\}$ 是等差数列)，$\{a_n \cdot a_{n-1}\}$，数列 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1$ 是等比数列；

③ $\{\log_m a_n\}(a_n > 0, m > 0, m \neq 1)$ 是等差数列。

【作业 8】 直线与平面的位置关系

(1) 引子问题：

平行于同一直线的两直线的位置关系是________。

(2) 类比创造：

① 平行于同一直线的一直线和一平面的位置关系是(平行或直线在平面内)；

② 平行于同一直线的两平面的位置关系是(平行或相交)；

③ 平行于同一平面的两直线的位置关系是(平行、相交或异面)；

④ 平行于同一平面的一直线和一平面的位置关系是(平行或直线在平面内)；

⑤ 平行于同一平面的两平面的位置关系是(平行)；

⑥ 垂直于同一直线的两直线的位置关系是(平行、相交或异面)；

⑦ 垂直于同一直线的一直线和一平面的位置关系是(平行或直线在平面内)；

⑧ 垂直于同一直线的两平面的位置关系是(平行)；

⑨ 垂直于同一平面的两直线的位置关系是(平行)；

⑩ 垂直于同一平面的一直线和一平面的位置关系是(平行或直线在平面内)；

⑪ 垂直于同一平面的两平面的位置关系是(平行或相交)。

(用于“直线与平面”的复习，系统复习知识，优化内在结构，培养“再创造”能力。)

【作业 9】 回归变换

(1) 引子问题：

对于任意一个非零实数，它的倒数的倒数是它本身，也就是说连续施行二次“倒数”变换后又回到施行变换前的对象，我们把这样变换称之为“回归”变换。

(i) 在中学数学范围内尽可能多地找出这样的变换；

(ii) 试提出一些与“回归”变换有关的问题。

(2) 开放探究：(在中学数学范围内，尽可能多地再现各种变换，

再加以判断其是否是“回归”变换，以下是一些例子。)

① 对于任意一个实数，其相反数的相反数是它本身；

② 对于任意一个复数，其共轭复数的共轭复数是它本身；

③ 对于任意一个集合，其补集的补集是它本身；

④ 对于任意一个存在反函数的函数，它的反函数的反函数是它本身；

⑤ 对于任意一个图形，它关于某一点(或某一直线)的对称图形的对称图形是它本身；

⑥ 对于任意一个锐角，它的余角的余角是它本身；

⑦ 对于任意一个在区间$[0, \pi]$内的角，它的补角的补角是它本身；

⑧ 对于平面上过一定点的任一条直线，“过该点作该直线的垂线”的变换是“回归”变换；

⑨ 对于空间过一条定直线的任一平面，“过该直线作该平面的垂面”的变换是“回归”变换；

⑩ 对于任意一个简单命题，它的逆命题的逆命题是它本身；

⑪ 对于任意一条双曲线，它的共轭双曲线的共轭双曲线是它本身；

⑫ 反比例函数$y=\dfrac{k}{x}$是“回归”变换。

(3) 进一步的研究：

(i) 研究一些特殊变换是“回归”变换的条件：

① 线性变换$y=kx+b$是“回归”变换的充要条件是$k=-1$，或$k=1$且$b=0$；

② 平面上绕某点旋转$\theta\,(0^\circ<\theta<360^\circ)$角的旋转变换是“回归”变换的充要条件是$\theta=180^\circ$；

③ 二次函数不可能是“回归”变换；

④ 幂函数$y=x^\alpha$是“回归”变换的充要条件是$\alpha=\pm1$。

(ii) “回归”变换的推广：如果连续施行$k\,(k\in\mathbf{N}^*)$次变换后又

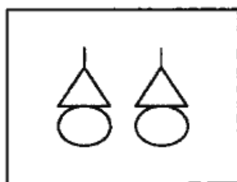
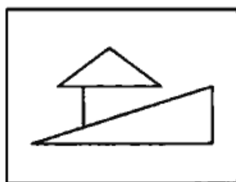
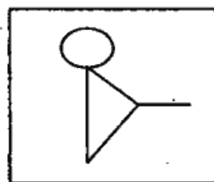
回到施行变换前的对象，那么称这样的变换为 k 阶“回归”变换。

① 平面上绕一定点旋转 120°的旋转变换是 3 阶“回归”变换，一般地，当旋转角为$\frac{2\pi}{k}$时，旋转变换为 k 阶“回归”变换；

② $y = \mathrm{i}x$（i 为虚数单位）是 4 阶“回归”变换。一般地，设 ω 为 1 的 k 次方根，则 $y = \omega x$ 是 k 阶“回归”变换。

2. 布置实践型作业

实践型作业具有可操作性、有序性、挑战性、趣味性的特点。比如，在学习到二次曲线时，可以让学生去寻找建筑中的二次曲线，说明都是什么样的曲线，为什么要这样设计，它的方程是什么，等等。在学习《统计图》后，要求学生收集、统计一个专题的数据，制成统计图、统计表，并进行合理分析。如统计我们学校在校生的人数、男女比例、班级分布情况；统计学生的时间安排、每天做作业的时间、睡眠的时间，能发现什么问题，有什么良好的建议，等等。再如，可以设计如下的作业：下面的图形是用直线、角、三角形、圆等几种基本图形设计成表示客观事物的图画，请同学们展开联想，用你学过的几何基本图形来表示生活中的事物，并附解说词。小组比一比，看看谁的作品更有创意。

这样的作业能让学生感受到数学知识与生活的密切联系，增强学生运用知识解决生活问题的能力。培养学生喜欢数学、学好数学的兴趣。在作业完成的过程中，每位学生都能体现出各自的创造性成果。

【作业 1】 探索圆的概念

（1）引子问题：

一些学生正在做投圈游戏，他们呈“一”字形排开。这样的队形

对每个人都公平吗？如果不公平，你认为他们应当排成什么样的队形？

（2）问题探究：

（i）这样的队形公平吗？为什么？（学生：因为各个学生所处的位置到被投物体的距离不相等，所以不公平。）

（ii）你能确定一个公平的队形吗？（学生：队形换成圆、正方形、矩形等。）

（iii）若有 4～10 个人，应该如何确定位置？（学生：队形换成圆、正十边形、正十边形的各边中点连线所得图形等。）

（iv）若有 10～n 个人，又该如何确定位置？（学生：队形换成圆、正 n 边形、正 n 边形的各边中点连线所得图形等。）

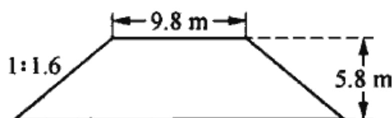
（3）问题串的归纳：

引导学生的思维回到主题："这些队形有什么共同特点吗？不同队形的学生位置有共同特点吗？"在学生思考理解的基础上，辅以课件，展示四边形、多边形内接于圆的过程，以动态的图象让学生感悟：原来看似不同的思维，实质是殊途同归的！在这样一放一收的过程中让学生自然地理解了圆的定义："到一个定点距离相等的点都在一个圆上"。

【作业 2】 与坡面有关的问题

（1）引子问题：

如图，一段防洪大堤的横断面是等腰梯形，堤基顶宽为 9.8 米，堤高为 5.8 米，斜坡的坡度 $i=1:1.6$。

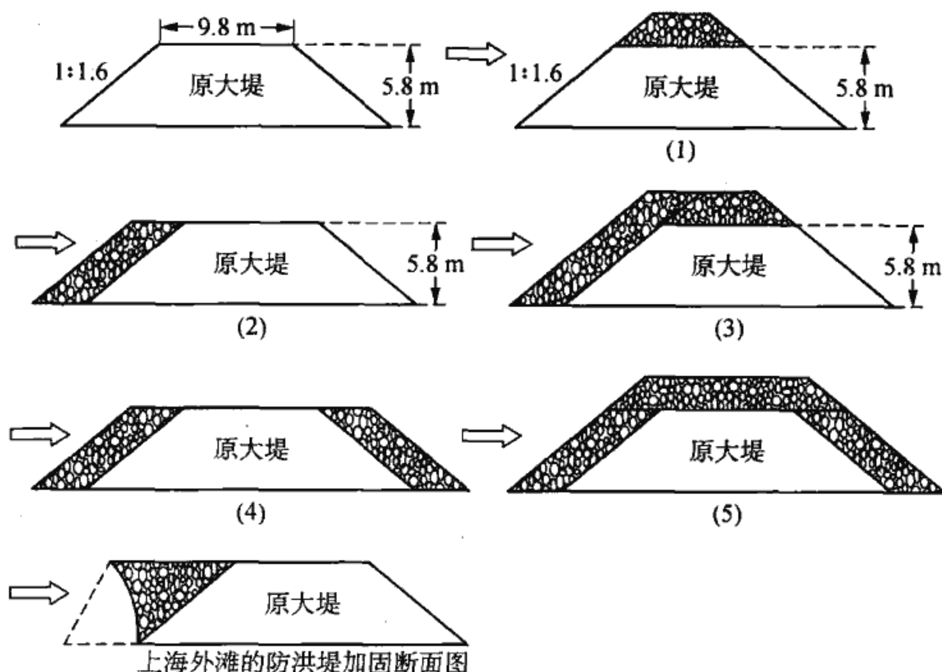


（i）计算堤基下底宽度的长；（精确到 0.1 米）

（ii）求坡角。（精确到 0.1°）

（2）为增强大堤防洪能力，请你给出加固的设计方案，并进行必

要的计算。

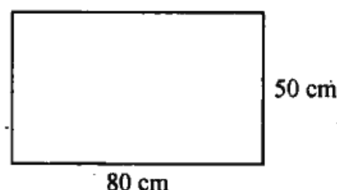


上海外滩的防洪堤加固断面图

3. 布置拓展型作业

拓展型作业的设计应以教材内容为生长点，通过有限的拓展，培养学生的问题意识，拓展学生的思维，引发学生的自主思考。例如：(1)在平面几何中，有勾股定理："设$\triangle ABC$的两边AB、AC互相垂直，则$AB^2+AC^2=BC^2$。"拓展到空间，类比平面几何的勾股定理，研究三棱锥的侧面面积与底面面积间的关系，可以得出的正确结论是："设三棱锥$A-BCD$的三个侧面ABC、ACD、ADB两两相互垂直，则__________。"(2)在$\triangle DEF$中有余弦定理：$DE^2=DF^2+EF^2-2DF\cdot EF\cos\angle DFE$，拓展到空间，类比三角形的余弦定理，写出斜三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的3个侧面面积与其中两个侧面所成二面角之间的关系式，并予以证明。(3)拓展：从上面的两个例子得到启发，你还能找一个平面中成立的定理，并且把它也拓展到空间仍然成立么？

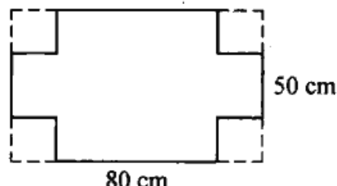
【作业】 不等式的应用拓展



（1）引子问题：

用一张长 80 厘米、宽 50 厘米的长方形铁皮，做一只无盖长方体铁皮盒（焊接处的厚度和损耗不计），问这只铁皮盒尽可能大的体积是多少？

（2）解决问题：



方案（一）：如右图，将长方体的四个角去掉一个小正方形后（为什么？），围成一个无盖长方体。

讨论解法，落实双基：

设被去掉的小正方形的边长为 x(cm)，

则 $$V = sh = (80-2x)(50-2x)x = 4x(25-x)(40-x) \quad (0 < x < 25)$$

错误解法：根据基本不等式，得

$$\begin{aligned} V &= 4x(25-x)(40-x) \\ &= 2(2x)(25-x)(40-x) \\ &\leqslant 2\left(\frac{2x+25-x+40-x}{3}\right)^3 \\ &= 2\left(\frac{65}{3}\right)^3 \approx 20\,342.6(\text{cm}^3)。\end{aligned}$$

正确解法：设 $$\begin{aligned} V &= 4x(25-x)(40-x) \\ &= \frac{4}{ab}(ax)[b(25-x)](40-x)，\end{aligned}$$

欲使 $ax = b(25-x) = (40-x)$，且 $ax + b(25-x) + (40-x) =$ 常数，也即 $ax = b(25-x) = (40-x)$，且 $a-b-1=0$，消去 x，解得 $a=3$，$b=2$。

所以 $$V = 4x(25-x)(40-x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{3}(3x)[2(25-x)](40-x) \\
&\leqslant \frac{2}{3}\left(\frac{3x+2(25-x)+(40-x)}{3}\right)^3 \\
&= 18\,000(\text{cm}^3),
\end{aligned}
$$

当且仅当 $3x = 2(25-x) = (40-x)$，即 $x = 10$ 时等号成立。（也可以通过求导数解决）

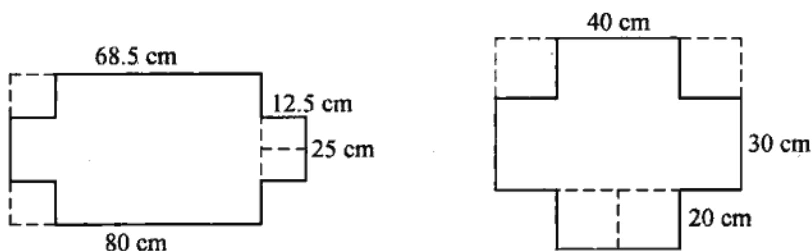
（3）提出新的问题：

引发新设计方案：这个结果是不是问题要求的尽可能大的体积？

（4）设计方案开放：

① 方案（二）：为了不浪费铁皮，将剪下的四个小正方形剪成小长条焊接到长方体的上口，可以增加体积。（利用面积相等，剪成宽度为 $\frac{20}{9}$ cm 的长方条，可增加体积 400 cm^3，总体积达到 22 000 cm^3）

② 方案（三）：将左侧剪下两个正方形，将其焊接到右侧的中间，可以构成一个长方体（如左下图），此时 $V = 68.5 \times 25 \times 12.5 = 21\,406.25(\text{cm}^3)$。



③ 方案（四）：也可以将上面两个小正方形焊接到下面中间，体积可能更大（直觉——因为更方！）（如右上图），这时，$V = 30 \times 40 \times 20 = 24\,000(\text{cm}^3)$，确实更大！

④ 方案（五）：不必去考虑如何“设计”，可以设要做的长方体的三度为 a、b、c，则根据面积相等，有 $ab + 2bc + 2ac = 4000$，由基本

不等式知，$4000 = ab + 2bc + 2ac \geqslant 3\sqrt[3]{(ab)(2bc)(2ac)}$，则

$$V = abc \leqslant \frac{40\,000}{9}\sqrt{30} \approx 24\,343.2(\text{cm}^3)。$$

此时，$ab = 2bc = 2ac$，即 $a = b = 2c$，代入 $ab + 2bc + 2ac = 4000$，解得 $a = b = \frac{20}{3}\sqrt{30}$，$c = \frac{10}{3}\sqrt{30}$。（这是一种理想化模型，这是最大的。此时长方体的底面也确实是正方形！）

（5）方案评价：

针对上述出现的各种结果，你最喜欢哪一个？

①“我最喜欢最后结论，它最大，符合题意”；

②“我认为尽管它最大，但做起来太繁（付出劳动力太多！），而且焊接的越多，质量越得不到保证（质量意识！）。所以我最喜欢第一个结论”；

③ 我最喜欢第三个结论，因为它综合了上述两者的优点——既考虑到了成本核算（制作过程简单），又考虑到了尽可能大，没有浪费。

4. 培养探究能力的作业设计举例

原问题是切线长定理：从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等，这一点和圆心的连线平分两条切线的夹角。

变式1：对同一问题寻求多种解法

本定理通常的证明方法是：如图1，连结 OA 和 OB，然后证明 $\triangle BPO \cong \triangle APO$，从而由全等三角形的对应边（角）相等得到：$PB = PA$，$\angle APO = \angle BPO$。

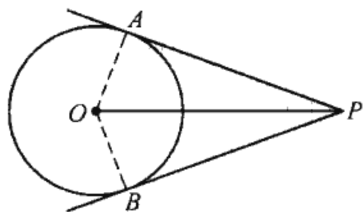


图 1

在学习了弦切角定理之后，教师就可以组织学生探索其他证明方法。连接 AB，由弦切角定理先证得 $\angle PAB = \angle PBA$，从而说明 $\triangle PAB$ 是等腰三角形，问题得到解决。

变式2：加强问题的条件

在已有结论的图形的基础上，围绕问题条件，添加适当的部分，

在所得图形上观察已知结论的应用，从而成功地设置问题，是几何教学中问题设置的重要途径。在本定理的图中，我们可在原来基础上添加一条圆的切线，便可得到如下问题：

问题 1　如图 2，PA、PB、CD 分别是$\odot O$的切线，试证明：$PA+PB=PD+DC+CP$。在这一问题的基础上，强调添加过程，就可得：

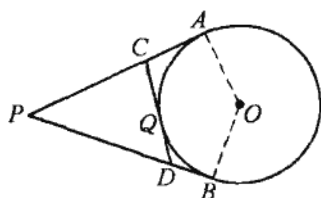


图 2

问题 2　如图 2，如果 PA 和 PB 为$\odot O$的切线，试证：对于劣弧 AB（不包括 A、B 两点）上的任意一点 Q，过点 Q 的切线与 PA、PB 分别交于 C、D 两点，则$\triangle PCD$ 的周长为定值。

如果使图形再进一步复杂化，我们还可以设置：

问题 3　如图 3，若$\triangle PQR$ 的内切圆与三边的切点为 A、C、B，则有 $PQ+RC=PR+QC$ 或 $PA+QC+RB=AQ+CR+BP$。如果这时，再把问题 2 与问题 3 结合起来，就自然会产生：

问题 4　如图 4，若$\triangle PQR$ 与六边形 $DEFCHI$ 有同一内切圆，则$\triangle PQR$ 的周长等于三个小三角形$\triangle PDI$、$\triangle QFE$、$\triangle RHC$ 周长之和。（可让学生说明这是为什么？）

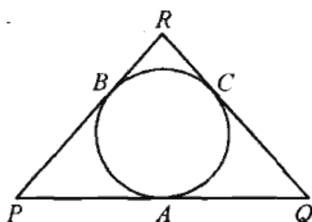


图 3

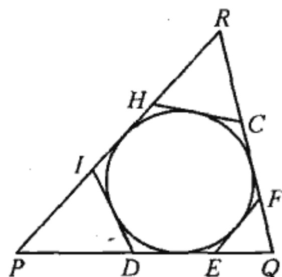


图 4

如果考虑圆外接四边形，则可设置如下的问题：

问题 5　如图 5，如一个四边形有内切圆，则这个四边形的两组对边的和相等。

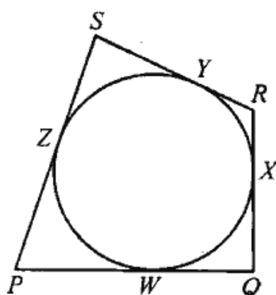


图 5

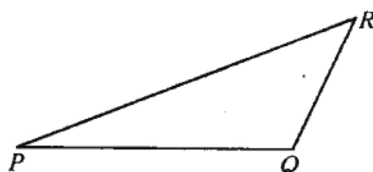


图 6

变式 3:减弱问题的条件

把问题 3 中去掉中间的圆,便可引出以下问题:

问题 6　如图 6,在一个三角形 PQR 中,试在其各边 PQ、QR、RP 上分别找出三点 X、Y、Z,使得 $PX = PZ$, $QX = QY$, $RY = RZ$。

如果照这样,把问题 5 中的图中也去掉圆,我们是否能解决以下问题?

问题 7　试在四边形 $PQRS$ 的四边上分别找出四点 W、X、Y、Z,使得 $PZ = PW$, $QW = QX$, $RX = RY$, $SY = SZ$。

但是问题 7 的设置是否与问题 6 一样令人满意呢?我们由图 7 可以看出,显然它不是恒有解的。在无解时,又能产生怎样的问题?在图形 7 的左边再作一个与四边形三边相切的圆,则得到图形 8,由此再来设置问题。由于图形 7 不恒有解的症结在于图 8 中有两段"多余"的线 e 和 f,若 $e = f = 0$ 时,则就得到了问题 7 的解,因而我们就设置如下的问题:

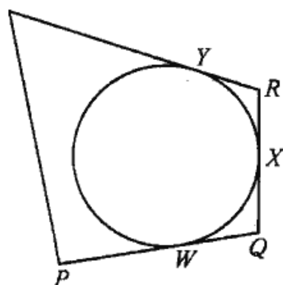


图 7

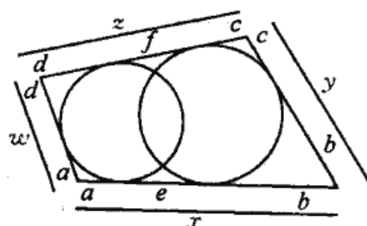


图 8

问题 8　如果凸四边形的两组对边的长度的和相等，则它必有一个内切圆与四边都相切(即图 8 中的 $x+z=w+y$ 时)。

变式 4:特殊问题一般化

在一个四边形中不一定恒有内切于四边形的圆，但是，如果我们连一条对角线，就可以得到两个三角形，他们各自都有内切圆。从这样的图形中能够得到什么启发？我们从特殊的图形——矩形来开始讨论。

如图 9，对角线把矩形分为两个三角形，其中各有一个内切圆，设两边长的关系为 $x>y$，则我们就有：

$$m+c=b,\ m=b-c=(a+b)-(a+c)=x-y。$$

问题 9　如果矩形被一条对角线分成的两个三角形内各有一内切圆，则对角线上两切点间的距离等于矩形两邻边之差。

从这一问题的解决过程看，直角这一条件似乎并没有用到，这样，把问题 9 中的矩形换成“平行四边形”，结论依然成立。那么，干脆考虑凸四边形的情形，能得到什么呢？

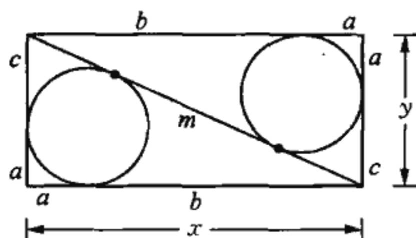


图 9

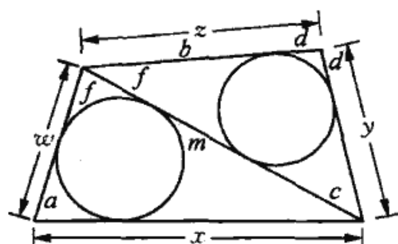


图 10

对图 10 进行分析，我们就可以设置下面的问题：

问题 10　如图 10，w、x、y、z 分别为凸四边形的四边长，试证明如图中的 m 的长为

$$m=\frac{1}{2}(x+z)-\frac{1}{2}(w+y)。(设\ x+z\geqslant w+y)$$

作为问题 10 的一个特殊情形，即 $m=0$ 时，可知凸四边形两组对边的和相等，而被对角线分割的两三角形内切圆在对角线上的切

点重合，由此又可设置：

问题 11　如图 11，若 AC 为$\triangle ABC$ 的最长边，试在$\triangle ABC$ 外找一点 D，使得 $AB + CD = AD + BC$。

（注：其解法显然是不唯一的，如图 11）

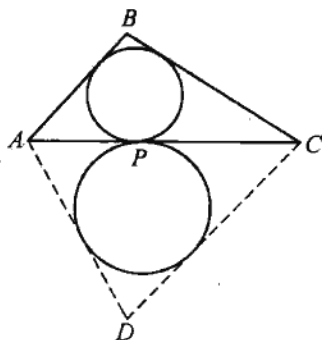


图 11

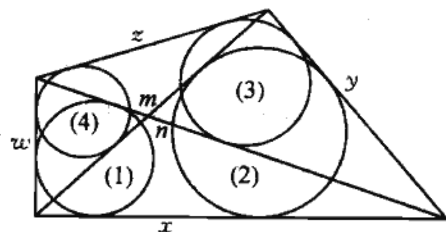


图 12

如果在问题 9 上再深入一下，把图 10 中的另一条对角线也画出，再作相应的内切圆，得到相应的切点间距离 n，由问题 10 知

$n = \frac{1}{2}(x + z) - \frac{1}{2}(w + y)$，故有

问题 12　如图 12，圆(1)、圆(2)、圆(3)、圆(4)分别是四边形的相邻两边与其对角线所成的三角形的内切圆，m、n 分别是两对角线上切点间的距离，则有 $m = n$。

变式 5：一般问题特殊化

在上面的图 3 中，如果把三角形特殊为直角三角形，再考虑这一图形的特点，就容易得到以下问题：

问题 13　直角三角形的内切圆直径等于勾股的和减去弦所得的差。

以下问题也是值得思考的。

在上面的许多结论中，能否再将它们特殊化，得到一些新的结论，设置出新问题？

本章小结

总之，数学作业的设计，既是达成具体学习目标和阶段性学习目标的需要，又是减轻学生负担，提高学习效能的需要。要从学生实际出发，本着与学习内容、学习水平相一致的原则进行设计，做到难易适中、容量适中。我们还可以根据不同课型、不同训练要求进行相应的作业设计，做到培养学生数学兴趣、提高他们数学学习能力的目的。

问题讨论

1. 就文中直线斜率概念的复习思路，设计对应的学生作业。

2. 就文中圆的切线长定理的分析，尝试训练题的各种变式。试总结提炼上述问题设置中的若干方法，看看在其他内容的设计中是否有效？并在实际教学中积累范例。

3. 初中、高中都涉及函数概念的学习，请例说初中、高中有关函数概念的作业设计。

第三章 数学作业的批改

第一节　布置数学作业的基本要求

布置作业是批改作业的前奏。在教学活动中，教师布置作业的目的是为了进一步巩固课堂上所学的知识，拓宽学生的知识面和视野，激发学生的求知欲和学习兴趣，培养学生发现问题、分析问题和解决问题的能力，挖掘学生潜能，张扬学生的特长和个性，提高学生的学习积极性。一般来说教师布置的作业多为课外作业，也称家庭作业。课外作业是由教师确定的，所布置的作业质量的高低，在很大程度上取决于教师。有些教师直到下课铃响了，才匆忙抓起课本，从中寻找习题，随意确定做“单号题”或“双号题”。这样，必然降低练习的效果，达不到练习的目的。因此，教师在备课时，必须将布置课外作业列入教学计划，认真地研究和选编课外作业题。

教师布置课外作业时应注意如下八点：[①]

（1）布置课外作业时，务必让学生予以足够的注意。

（2）布置课外作业时，切勿仓促行事，要计划好布置作业的时间。

（3）布置课外作业时，要向学生讲清作业的目的，明确解释怎样

① 田万海. 数学教育学. 浙江教育出版社，1992年9月，第35页

完成作业，采取什么格式。要回答学生就指定的作业提出的问题，对于某些较难的练习题，要给予适当的提示或建议。

（4）作业的难度要适当，难易之间要有一定的坡度。一般地说，作业的内容应是学生力所能及的，但也要包含一些困难因素，使学生通过自己的努力能够完成。

（5）作业的份量要适当，不要让学生做大量机械重复的练习，以免加重学生的负担。

（6）作业要有重点，要注意作业的代表性和典型性。课外作业的重点应放在基础知识的掌握和基本技能的训练上，并且最终是为了发展学生分析问题和解决问题的能力。

（7）布置作业要留有余地。可根据学生的水平和能力的不同，指定不同的作业。如允许某些学生少做某些题，也可以为某些学生布置一些选做题和思考题等。有些教科书和参考书中的练习，分为A、B、C三组，其中A组属于基本题，B组是略有提高或有一定综合性的题目，C组题综合性、灵活性较大，供学有余力的学生选用。

（8）为了保证课外作业的质量，教师应要求学生养成按时完成作业的习惯，做到当天完成作业，不要在交作业之前才匆匆忙忙地去做作业；要求学生自觉地独立完成作业，避免抄袭或依赖父母兄长代做作业的情况发生；做作业前必须复习教材或笔记，理解概念、原理、法则；做作业要专心细致，做完作业后，要养成自我检查的习惯。

上世纪90年代提出的这些要求已经非常明确，但是在实际教学中，有部分教师，对学生作业的作用认识不够，把作业变成了提高自己教学成绩的唯一途径，致使师生关系紧张，学生厌学现象时有发生。为了解决这些问题，结合我们的教学实际，对上述布置作业的要求进一步具体化，我们把布置作业的要求总结为如下“三要”。

一、布置作业要“准备充分”

做任何事情都不应该打无准备之仗，预则立、不预则废。布置

作业也是如此，布置作业之前要做如下准备工作。

（一）布置作业前要“立规则”

每学期初老师需要对作业的总体规范做出要求。

1. 作业本要求。采用什么规格的作业本，需要准备几本作业本。

2. 作业本页面要求。留空方式，书写要求，错误处理要求等。

3. 作业书写要求。是否需要抄出原题，是否标明出处，书写规范等。如果有作图（如初中学习平面几何阶段、高中学习立体几何或解析几何阶段）一般要求用铅笔并使用圆规、直尺、三角板等工具。

4. 作业交送要求。包括时间、方式等。

5. 作业订正要求。对做错的题要及时订正，教师二次批改（复批）的形式是面批还是他批。

案例：

上海市育才中学数学学科学生作业规范要求

1. 每位学生需准备两个数学本，一个是作业本，一个是错题本。

2. 学生数学作业的书写必须使用钢笔或圆珠笔。

3. 将作业本每一页纸纵向平分为两栏，左栏用完后再用右栏，书写要工整。解题过程要严格按各种题型的规范去做，几何作图用铅笔、直尺或圆规，图形准确清晰，图一般画在题的右边或下边。

4. 学生要认真、独立、按时完成作业，不得迟交、缺交。一般情况下第二天上午第一节课下课后由课代表将作业本交到老师办公室。

5. 学生在老师批改后应及时订正，并将错题订正在错题本上，并按老师要求将错题本上交。

（二）布置作业前要“知学情”

教师在布置作业之前，应对学生的认知情况、认知特点有充分

的了解。教师在布置作业时，应充分考虑作业任务与教学目标的内在联系，要让学生知道作业任务与需要达到的学习目标之间的关联程度，使学生认识到所布置的作业能够为特定知识、技能的学习提供适当的运用和练习的机会，有助于学习目标的达成。知道哪些作业是与当前学习内容有关的，还有哪些是对过去学过内容的复习巩固。当学生认识到作业与他们的学习目标联系时，就会愿意付出必要的努力去完成作业。

（三）布置作业前要"摸题情"

有些教师为了省时省力，随便划定一些习题或发放一张试卷作为数学作业，这种做法是不可取的。因为这样的数学作业没有针对性，可能会给学生增加意想不到的作业障碍，久而久之养成学生不认真对待作业的习惯，甚至对作业产生厌恶感。

为了提高作业的有效性，数学教师不仅要设计作业，而且对所布置的作业都必须提前做过，只有教师事先做过，才能了解作业的题情，如知道作业的深浅、作业的难易、学生完成作业所需的时间、作业是否与教学目标匹配。每次作业应根据学生的实际水平和课堂教学目标从课本或课外习题中精选出合适的习题。布置作业时一定要慎重，力求少而精，让学生既"减负"又"增效"。

二、布置作业要"时机恰当"

如何才能让学生主动、积极地去做作业呢？

关于何时布置作业，束仁龙老师调查了安庆、池州两地城市的初中和农村初中各 5 所，随机抽查教师 100 人，发现在不同时间域布置课外作业的教师占被抽查教师总数的比例是：下课时间布置的占 15%，下课前 2 分钟以内布置的占 33%，下课前 2—3 分钟之间布置的占 38%，下课前 3 分钟以上布置的占 14%。

从调查结果可以看出，下课前 3 分钟以内和下课时间布置作业的教师高达 86%，其中下课前 2 分钟以内和下课时间布置课外作业

的教师竟达48%。[1]

有的老师布置课外练习，特别是家庭作业的时候，一定要等到放学前才告诉学生，问其原因，他说"家庭作业就得在家里完成，布置早了，他们在学校就做好了，回家就玩"。其实这样的老师在不经意中混淆了课外练习的本质，家庭作业的目的并不是为了防止学生在家里玩。教师布置得早一点，练习中有什么不懂的，学生就可以在学校问问老师，既解决了问题又增加了师生之间的交流与感情，多好的一件事情啊。若学生回家做作业，则遇到困难时，往往得不到有效的帮助。

为此，布置作业要根据作业的特点，找准时机。不同类型的作业可在不同的时间布置，常见布置形式如下：

（一）课前布置

课前作业布置。包括自主预习、确定目标、背景介绍、情境导入等。课前布置作业可以增加对新课的预习因素及思考时间，使学生带着问题听课，从而能把握重点、有的放矢地解决学习中遇到的问题。

随着课改的深入，许多地方推出的学案，也是课前作业的一种形式。

案例：

学案——指数函数的图象及其性质

班级________ 姓名________ 学号________

	问题导学	问题解决 （请填入下表）	问题反思
思考	1. 如果让1号同学准备2粒米，2号同学准备4粒米，3号同学准备8粒米，4号同学准备16粒米……，按这样的规律，32号同学该准备多少米？		

---

① 束仁龙. 初中生课外作业配置原则初探. 教学与管理，2001年5月

（续　表）

	问题导学	问题解决（请填入下表）	问题反思
	2. 在以上问题中，每位同学所需准备的米粒数用 y 表示，每位同学的学号用 x 表示，y 与 x 之间的关系是什么？		
探究	1. 思考如下问题：① $y=2^x(x\in\mathbf{N}^*)$ 和 $y=0.5^x(x\in\mathbf{N}^*)$，这两个解析式有什么共同特征？ ② 它们能否构成函数？ ③ 它们是我们学过的哪类函数？如果不是我们学过的函数，你能否根据该函数的特征给它起个恰当的名字？		
	2. 思考如下问题：a 的取值范围有什么要求？		
	3. 能否写出一两个指数函数？ 判断函数：$y=2\times3^x$，$y=-2^x$ 是否为指数函数？		
	4. 从图象和解析式研究指数函数的定义域、值域、单调性、奇偶性。		
体验	1. 已知指数函数：$f(x)=a^x(a>0, a\neq1)$ 的图象经过点 $(3, \pi)$，求：$f(0)$，$f(1)$，$f(-3)$ 的值。		
	2. (1) 在同一平面直角坐标系中作出 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 和 $y=3^x$ 的大致图象，并说出这两个函数的性质； (2) 求下列函数的定义域：① $y=2^{\sqrt{x-2}}$，② $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$。		
收获	通过本节课的学习，你对指数函数有什么认识？你有什么收获？		

（二）课中布置

只有满足了学生需要的作业才是真正有用的作业。教师应根据教学内容、重点、难点的不同，灵活地将作业穿插在相应的教学环节中让学生及时完成。课内作业，不一定非要教师讲解在前，练习在后，也可以边讲边练，还可以先练后讲。在课堂上抓住学生的兴奋点布置作业，也就是在一堂课的高潮或小高潮时引出作业，以巩固所学知识。

设计精当的数学作业在教学延伸处适时地切入，能起到画龙点睛的作用，引发学生深层次的思考和实践，同时实现知识与方法、课内与课外的沟通，成为一堂课的灵魂。

案例：

四年级数学“从克到吨”这一课中，老师在课中布置了这样的一道改错题：

小丁丁的数学日记：早上起床后，我拿着重 15 千克的牙刷开始刷牙，然后接了约 2 吨重的水洗脸。妈妈已为我准备了一盒 250 克重的牛奶和两个 200 千克重的馒头。我快速地吃完早饭，背上 2 克重的书包上学去。在路上，我碰到了小胖，他的体重有 50 多吨呢！我们一起来到了学校，校门口那两头重约 1 千克的石狮子威武地站立着，仿佛在迎接着我们。（上海市静安小学）

案例点评：机械、重复性的练习，枯燥乏味，如何让数学练习有效、有趣、具有现实意义？数学来源于生活，学生的现实生活又是丰富多彩的，老师在设计《克、千克、吨》的练习时，改变了传统的练习形式，而是选取了学生熟悉的、有一定生活背景的、能够理解的内容，通过日记的形式组织学生进行练习，使学生能结合自己所经历的事来理解克、千克、吨的大小关系，从而能正确使用这些单位。

这样，使抽象的数学知识与现实生活密切联系了起来，既激发了学生学习数学的兴趣，又使学生的生活经验促进了数学知识的学习。当数学的练习把知识技能与情感态度融为一体时，学生自然就愿意学习数学了。①

（三）课后布置

课后布置作业是大多数老师采取的方法。一般的教师在下课前2分钟之内布置作业，也有的教师在放学之前布置。课外作业不该是单一的、学生无法选择的，但长期以来，全班学生同做一道题的教学观念已根深蒂固，由于学生的自身特点和掌握知识的水平不一样，这种“一刀切”的作业形式显然不能满足不同学生的需要，不利于学生的个性发展。《数学课程标准》特别强调：“现代学习方式要尊重学生的差异，要尊重每一个学生的独特个性和具体生活，为每个学生富有个性的发展创造空间。”我们应该因材施教——因材布置课后作业，即根据不同的学生或者小组，布置不同的作业，或者让学生自己来挑选，根据自己的基础、兴趣，挑选适合自己的作业，甚至可以不选。因此，教师要改变作业单一化的弊端，坚持差异理论，找准学生学习的最近发展区，设计和布置适宜不同层次学生的分档作业，让学生自由选择。这样，就能有效地激发学生的求知欲和好胜心，让他们各尽其能、各展其思，提高学生的作业质量。

（四）阶段布置

阶段布置的作业可以是知识的系统总结、单元训练，教师也要根据教学要求有意识地布置一些能让学生进行合作、探究的实践型作业、研究性学习作业，让课内合作学习在课外继续得到延伸，使“合作完成”成为学生作业的重要理念。《数学课程标准》明确强调，学生的合作精神与能力是重要的学校教育培养目标之一，我们倡导自主、合作、探究的学习方式，但培养学生的合作意识、合作能力绝

---

① 朱萍，陆少明主编. 小学微笑教学的研究——“阳光校园”的实践探索. 上海教育出版社，2009年3月，第208页

不能单靠课堂教学来解决。可以尝试下列几种形式的阶段作业：

1. 小单元作业群。教师按教学小单元提供大量的数学巩固性作业，结合教师自配巩固性练习形成小单元作业群。教师只提一个每天完成作业的最低量的要求，让学生自由选择完成，并自由选择组成协作小组进行互查和讨论，由小组长汇集作业情况上报任课教师进行适当的调整和指导。

特色：尊重了学生的选择，改善了作业效果，增加了学生之间的学习协作，学生享受到了做学习的主人的一种快乐。

2. 自编延伸式作业。教师在学生完成小单元作业后，要求学生针对问题的条件和结论进行改换和延伸形成新的作业，对学生个体要求可以从“无”到“有”，从“简”到“难”自编数学题，形成协作小组作业，每周一次展示交流时间。

特色：发挥了以往作业评价未曾发挥的交流作用；学生在编题过程中学会了知识的归类和整理，在一定程度上模拟了知识的运用过程；编题后自我完成，可以认识数学问题的逻辑性和条件语言的严谨性，增强了学生的自信心和协作意识，愉悦身心；学生通过既当参与者又当评价者的角色，参与了对作业设计和完成结果的评价，提高了他们的自我价值体现。

3. A、B型检测作业。教师在完成某章教学或模块教学进行复习时，可以设置两套平行式检测作业称为“A、B型检测作业”；可以在课堂完成，也可以在课外完成，但完成后一定要交换批改，批改时由学生自由选择“师傅”帮助完成，教师只针对批改进行评价。

特色：发挥了以往考试评价未曾发挥的竞争、交流作用；学生在分卷检测后学习了知识的归类和整理并根据自己的体会对数学问题做出评价，在一定程度上模拟了知识的运用过程；特别是对A、B卷的评价，让学生更深刻理解了知识的内涵，增强了学生的学习自信心和健康的竞争意识；学生通过教师对评价的评价，参与了对数学问题设计和完成结果的评价，提高了他们的自主学习感。

4. 实践探究型作业。教师依据新课程的研究性学习指导思想，

利用教材中的实践性作业，结合本地或本校运用数学的实例创建研究性学习课题，形成实践探究型作业。具体做法：①教师给定研究性学习选题指南，学生自由组合成研究性学习小组，自由选题；②小组协商制定实施计划并交教师审核；③学生搜集整理资料并进行反馈与修正；④形成作业成果；⑤班级汇报交流，进行评价。

特色：给了学生更大的选择自由，有创造性，可以寻求合作伙伴，与生活紧密结合，加速对数学社会运用的理解，学生自主学习中诸多能力的培养能在作业过程中体现。与传统作业比较，实践探究型作业有明显的优势：(1)实践探究型作业往往是综合的专题学习，学生在驾驭专题学习中容易成为学习活动的主人，有利于学生创新思维与能力的培养；(2)作业完成时间较长，作业反馈相应延迟，时空的广阔，有利于提高学生学习的自觉性，提高学生广泛搜集信息的意识和能力；(3)重视从单独完成到合作完成，有利于培养学生的合作精神；(4)作业过程、完成方式和评价方式等方面的开放性。实践探究型作业是对传统作业的结构性调整，针对传统作业的弊端“作业形式单一；作业不鼓励合作；重视结果而不重视过程；对作业的评价是被动评价”等而设计的作业模式，为学生提供与学习内容紧密相关的研究课题，学生带着问题，边学习，边研究，提高了数学学习的层次，把自己的研究成果与同学交流、共享，增强了学生学习数学的兴趣和信念，合作意识和创新精神也得到了培养。

案例：

“数学学科综合式”研究性学习

这种类型课题涉及多个数学学科的内容，需要综合运用多个学科知识进行研究。例如，对于“研究二次曲线的作用”，教师可指导学生从以下几方面进行。

1. 找出和下列主题有关的曲线：(1)行星的轨道；(2)火箭的弹道；(3)手电筒、闪光灯和其他光源；(4)望远镜。

2. 从下列的任务中选择一个进行研究，然后在班级里汇报研究成果：

(1) 写一个报告，给出每一种曲线的一般方程式，尽可能多地找出它们在现实生活中的应用；

(2) 准备一张表或海报，列出各种二次曲线，给出图形描绘和一般方程式，尽可能多地列出实用的例子；

(3) 选择二次曲线的一个例子，准备一份书面或口头报告，介绍这个例子的历史，解释这种曲线的特征是怎样发挥作用的。

再如，在研究性学习课题“多面体欧拉定理的发现”的教学中，让学生从最常见的正方体入手研究欧拉公式，看看随着顶点数 F、棱数 E、面数 V 的增减，它们之间的关系是否变化，从而培养学生的探究精神。

三、布置作业要“坚持原则”

布置作业的根本目的是为了促进学生的学习，为此布置作业要坚持如下五条原则。

(一) 少而精的原则

布置作业首先要考虑学生负担是否合理。负担过重，影响学生全面发展；负担过轻，则无法发挥学生潜力，最终制约发展。教师要认真地钻研课程标准和教科书，掌握每一部分教学内容的来龙去脉及其地位和作用，明确教学要求。这样就能围绕知识的重点、难点和关键，有的放矢地精选习题。备课时，教师（特别是青年教师）要按照对学生的要求，将课本上的习题演算一遍，明确各题的要求、解题的关键、解题的技巧、解题的格式等。要区别哪些题是主要的，哪些题是次要的；哪些题是简单的，哪些题是综合的；哪些题是巩固性的，哪些题是创造性的；哪些题学生可以独立完成，哪些题需要给出提示等。

总之，要精选那些典型的习题，使学生通过训练，既能巩固所学

知识，又能触类旁通，举一反三。减少知识点和题型的重复度。题目的重复不仅浪费学生的时间，也增加了教师批改作业的时间。教师可将练习、习题及总复习题中A、B、C组题目贯通起来，综合考虑知识点和题型，减少知识点和题型的重复，提高作业训练的有效性。对重要的知识点，可让学生训练不同的题型，以发展学生不同的技能倾向和应变能力。

（二）有针对性的原则

布置作业的主要目的之一是巩固所学知识，加深对数学定义、公式、定理的理解。对于新授课，课堂练习以巩固所学知识为主，难度与例题水平相当。数学的定义、公式及定理有其适用条件，布置作业时要考虑这一点，使学生通过练习后搞清这些适用条件。

课外作业以加深理解为主，立足于大多数学生的程度，让学生经过独立思考后能够完成为宜。对于阶段复习课，作业以综合和灵活运用知识为主，可难些。对于考试前辅导课，作业要起模拟考试的作用，让学生熟悉考试的题型与题量。教师要深入了解学生，例如，哪些内容学生学得较好，哪些内容学得较差，哪些内容容易遗忘和混淆；哪些学生理解力较强、智力发展较快，哪些学生理解力较差、智力发展较慢等。掌握了这些，教师就能从学生的实际出发，有针对性地选择课外作业。

（三）提升思维原则

要求教师针对能力培养计划，认真研究题目的能力培养功能，使学生通过训练，逐渐完善思维结构，提升思维能力。思维训练要注意阶段性，循序渐进，由浅入深，才符合学生能力发展的要求。教师要善于根据教材和学生的实际自编、改编、选编一些课外作业题。特别是当教材中配备的习题太深或太浅时，教师要自编一些过渡题、联系题或引申题，在一单元或一阶段的教学结束后，教师要选编一些综合性的练习题等。

（四）分层递进原则

布置作业必须在满足教学基本要求的前提下，根据不同层次学

生的要求，使他们各取所需，各有所得。刘佛年先生早在1979年就建议：布置作业时，选择浅一些的题目给程度差的学生做，使他们通过做作业也能掌握基本知识；对程度好的学生则给他们难一些的题目，让他们多动脑筋，甚至看一点参考书才能答出来。[①]

比如在作业布置时，利用“作业超市”的形式设置三类题目。A类为基本题，紧扣当天所学的内容，主要目的是用来巩固新知识；B类是基础题，这是针对一部分基础薄弱的学生布置的，浅显易懂，有利于他们获得成功的快乐，增强学习的自信心；C类是发展题，这种题目有一定的难度，主要是针对基础好的学生设计的，有利于培养学生思维的灵活性和深刻性。在“作业超市”里，学生可自主选择类型，也可以各种类型自由搭配，做到因人而异，各取所需。布置作业的方式也要因人而异，采用不同的作业布置方法，针对学生的特性和能力差异，满足不同层次学生的成功欲，达到转化和提高的效果。

（五）互动性原则

《数学课程标准》中指出：“教师应激发学生的学习积极性，向学生提供充分从事数学活动的机会，帮助他们在自主探索和合作交流的过程中真正理解和掌握基础的数学知识与技能、数学思想和方法，获得广泛的数学活动经验”。作业布置是数学教学的一个重要组成部分，但不应是教师的“专利”，让学生参与布置作业，可以让学生针对当天或这个星期的教学内容出一些易错的、较难的题目贴在教室后面供大家选做，这样，出题的同学最起码弄懂了题目的来龙去脉，而且选编的作业题与所学的知识联系紧密，难易适合；另外，对于身边同学出的作业题大家也有一种“非做对不可”的欲望。这样更能突出“学生是数学学习的主人”。有时老师也可以与学生一同做作业，在真实的情境里实现师生的“同心、同行、同乐”，实践证明这一做法能充分调动学生学习数学的积极性，加强同学之间的数学交流。

---

① 金一鸣等编．刘佛年教育文选．华东师大出版社，1999年10月，第177页

案例：

小学数学作业布置要体现“三性”[①]

一、布置作业要体现层次性

数学是一门探索性强的学科，要使学生掌握某种数学知识，必须经过准备复习（新旧知识联系）、新授（师生共同探究）、巩固（学生作业）几个环节来完成。从这个角度看学生应该有作业，但我们布置作业要有层次性，绝不可从头到尾一刀切，做机械重复性作业。我们做老师的有这样的体会，如学习“四则混合运算”后每天给学生布置几道计算题，正确率一次比一次下降。因为学生感到厌烦，效果就不好，这时布置作业可以换一种形式，提高一个层次，如在下列等式中的“□”里填上一个适当的数：

$$3.6 \times (53.73 - \square) \div 0.36 = 403.2。$$

又如，下列计算对吗？

$$0.24 \times 5 = 24 \times 5 \div 100 = 120 \div 100。$$

这样，可使学生对作业有新鲜感。又因不同的学生学习不同水平的内容，对不同的学生提出不同的要求。如学习“三角形面积”时，第一步要使全体学生能熟练地计算一般三角形的面积，以及已知三角形面积求三角形的底和高，布置一些基础题；第二步要对中上游学生布置一些发展性题目。如，在$\triangle ABC$中D是BC的中点，$\triangle ABD$与$\triangle ADC$的面积相等吗？为什么？第三步要在此基础上引导学生解如下的研究性问题：已知$\triangle ABC$中，如果$BD=DE=EC$，$BF=FA$，则$\triangle BFD$的面积与$\triangle ABC$的面积之比为多少？

这样的作业可以使低、中、高水平的学生都学有所得，又可调动学生做作业的积极性，培养学生永不满足、积极向上、勇于探索的精神。

① 转自：宁波市黄鹂小学信息网，2003年12月25日

二、布置作业要体现思考性

学习习惯是人们在学习活动中养成比较稳定的行为方式，良好的学习习惯与学生认知有密切联系，在数学教学中教师布置作业要体现独立思考性。如学习“百分数意义”后，可布置这样一题课外作业：以前我们学习“分数的意义”，现在我们又学习了“百分数的意义”，那么它们之间有什么联系和区别呢？让学生去独立思考，既能把新旧知识联系起来，又能区别两种意义内涵。到了中高年级不布置机械重复的家庭作业，要布置带有思考性的题目，如学习“梯形面积”前，提出以下几个问题：

（1）想一想三角形的面积是怎样推导的？

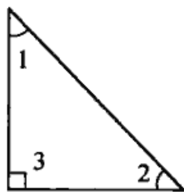
（2）书上是怎样介绍梯形面积计算公式推导的？

（3）你有没有其他的方法来推导梯形面积公式？

第二天，学生迫不及待，作图的作图，操作的操作，给出了分解的方法。久而久之，学生遇到问题肯动脑筋，培养了他们创新意识与创新能力。

三、布置作业要体现趣味性

托尔斯泰说过：“成功的教学需要的不是强制，而是激发学生的学习兴趣。”兴趣是学生学习的推动力，兴趣是成功的老师，所以我们平时布置作业出几道具有游戏性、趣味性的题目：如看着图说话，比谁说得多；如(1) $\angle 1$ 是锐角，(2) $\angle 3$ 是直角，(3) $\angle 3-\angle 1=\angle 2$，$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$……；又如教“年月日认识”这一节课之前，布置以下一题去预习课本内容：小明今年 12 岁，过了 12 个生日，而小东今年也是 12 岁，却只过了 3 个生日，这是怎么回事？这样一问，学生的好奇心，学习兴趣大增，能主动、积极、认真地去完成你所布置的作业，效果也很好。



综上所述，在教学改革的过程中，合理布置作业是关键。让我们全体教育工作者共同来探讨、研究，如何合理布置作业能切实减轻学生的学业负担，让他们在快乐中学习，在快乐中成长！

第二节　数学作业批改的意义和原则

所谓批改作业，应包括“批”和“改”双重意义。“批”就是批示，即指出答案的正误，并针对作业的内容提出具体而又富有建设性的建议；“改”就是修改，找出错误的原因并且重新建立正确的答案。

数学作业批改是反馈教学效果的重要渠道，也是帮助学生扫除知识盲点、修正错误的必要途径。

数学作业的批改具有互动性、过程性和激励性的特点。批改作业的过程是师生、生生相互交流共同提高的过程。批改工作做得好可以进一步激励学生的发展。

一、数学作业批改的意义

学生是否掌握课堂教学内容，课堂练习是一个重要的了解窗口，课后作业特别是书面作业的批改更是一个重要渠道，实践证明，数学作业的批改具有如下意义。

（一）了解学生学习状况

老师在批改作业的过程中可以全面了解每一个学生的学习状况，了解学生对教学内容的掌握程度。学生作业中对在哪里、错在哪里、解法如何等等都会清晰地展现出来，教师对自己的教学效果会一目了然，实现学生的信息向教师反馈。

教师批改作业，是对学生学习过程的了解，也在很大程度上监督完成作业的情况。因为要完成老师布置的作业，学生就要定出学习计划，安排学习时间，养成良好的学习习惯，实现从被动学习到主动学习的转变。做作业是学生应尽的义务，借此可以帮助学生增强责任感，培养学生的责任意识。

（二）调整师生教与学策略

作业不仅是对学生“学”的效果的检测，同样也是对教师“教”的

效果的检测。我们都知道作业的功能对学生来说，它能巩固知识、强化能力、拓展内容、评价自我、改进学习策略、完善学习过程；对教师来说，又能掌握反馈信息、调整教学行为、丰富教学内容、检验教学效果、提高教学质量。从这个意义上来说，作业批改是师生双方互相了解、互相分析、互相评价、互相提升的一个过程。

批改作业是教师了解学情最重要的途径。学生能在作业中体现其对知识的掌握程度，教师就能明了从课前到课后，学生掌握整个知识体系学习的进程、存在的问题；注意学生所做题目使用知识点的变化，有意识地思考、研究这些知识点在课本中所处的地位和相互之间的联系，能提炼学生解题所用的知识点、方法，体会学生解题和表达方式的特点，为调控和改进教学做准备；如果经常出现多数学生不能够解答的问题，则要反思教学定位是否合理？预期目标是否过高？通过批改作业得到对自己教学效果的反馈信息，从而对自己的教学内容和教学方式进行调控。

学生的数学学习是一个反馈控制系统，做作业是对接收的信息进行加工，并把结果输出，然后经老师的评价或自我评价，又反过来对信息的再输入和再输出施加影响，从而达到控制的作用，以达到预定的学习目的。教师对作业的及时批改对学生来说起着强化正确、修正错误、改善思维等作用。学生可以从教师的批改中发现自己所欠缺的知识，及时改正有关错误信息，同化和顺应正确信息，加强对知识的理解和记忆，查漏补缺，提高学业成绩。作业批改也是学生对自己的课堂学习结果进行整理、反思、系统、消化的过程。作业的及时批改，既能使老师及时得到学生学习状况的信息，以便及时调控自己的教学，又能使学生及时对新知进行巩固和强化。

（三）提升学生兴趣信心

学生在某个学科上取得成功，兴趣和信心的作用不可小视。优秀的老师都非常重视作业的设计与批改，在作业的形式上不仅有口头作业、书面作业，还有分层作业、动手操作、社会实践、手抄小报、学习随笔、个人博客等，由老师“教”转变成学生“学”，很好地突出和

落实了学生的主体地位。不仅如此，批改的方式也非常灵活多样，小红花、小红旗、小星星、大拇指、发喜报、激励性评语、对话式评语、谈心式评语等等综合运用多种评价手段，为学生搭建了通向成功的平台，学生从中获得乐趣，树立信心，提高了老师与学科对学生的亲和力，提升学生的学科素养，也能映衬出教师的素养。

（四）利于师生心灵沟通

新课程要求注重培养学生的情感、态度、价值观，教师在批改作业时要善于捕捉学生作业中的亮点，给予赞赏和鼓励。在作业批改中使用鼓励性评语，能架起师生沟通的桥梁，形成和谐的师生关系，促进教学。鲁迅的一篇文章中写到，藤野先生精心修改过的讲义，成了鲁迅先生最珍爱的东西，刻骨铭心，并影响了他的思想和人生轨迹。从而可以看出作业还有一个相当重要的隐性作用，那就是通过批改作业，师生的关系会更加密切。通过批改作业，教师体现着高尚的人格魅力，并连同严谨治学的态度、求真务实的精神、关心帮助的品德，一点一滴地影响着学生的未来。所以，批改作业，更是师生心与心的沟通。巴尔扎克说："感情是一种熏陶力量。"在作业批改中，如果教师倾注自己的感情，从心开始，从爱入手，定能提高教学质量，取得意想不到的效果。

案例：

作业——师生心灵对话的舞台[①]

小姜是一位非常文静、内向的女孩，从听不见她说一句话，笑一下对她来说也很吝啬，成绩很不好。《数学课程标准》明确指出："评价要关注学生的个性差异，保护学生的自尊心和自信心。"为了保护她的自尊心、自信心，我从没有在班上指出她的缺点，而是想办法寻

① 沈红．明珠小学，http://61. 152. 202. 92/lwzx/UploadFiles _ 1861/200906/2009061614182420. doc

找她的优点。我发现她的数学作业格式很规范，字写得很工整。于是，我在她的作业本上写道："批改你的作业，是一种享受。""你的作业和你一样漂亮。"然而一个月后，小姜还是没有一点变化，依然冷漠，依然不合群。

真正对她有所了解是去她家家访。小姜家庭条件很拮据，从小在父母的吵架声中长大，胆小内向的她显得很孤僻、忧郁。于是，我又在她的作业本上写道："做爸爸妈妈的乖女儿。""努力学习，用最好的成绩报答妈妈。""老师期待着你的进步。"

学习了轴对称图形后，我布置的作业是剪一个轴对称图形，涂上你喜欢的颜色，贴在作业本上。小姜同学剪了一颗爱心，并涂了红色。我批改的时候眼睛一亮，不仅等第是优，还写出了点评：你剪的不仅是一个轴对称图形，而且是一颗漂亮的"爱心"，老师希望你拥有一颗爱心，经常帮助他人，和同学友好相处。

经过多次在作业本上的心灵对话，渐渐地小姜开始在上课时发言，也能和同学在一起玩耍了，成绩也有所提高。

二、作业有效批改的原则

数学作业的批改是否有效，需要从教师的操作和对学生的影响两方面来保证，一般应遵守如下原则。

（一）及时性原则

及时性原则包括学生作业完成得及时、教师批改得及时、学生订正得及时。学生做作业是一种信息输出行为，教师从学生的作业中得到反馈；教师批改作业也是一种信息输出行为，学生也能从中得到反馈，这种双向的信息反馈进行得越多，教与学的效果也就越显著，因此批改学生的作业应该及时。例如，在教学工作中，可采取每节课都给学生留十分钟的独立作业时间，保证大多数学生能在课内完成。学生做练习时，巡视指导，关注后进生，发现问题，及时纠正，作业收回后，及时批改，并在必要时对部分学生进行面批。坚持

当日作业当日批改、当日订正，这样可以及时总结、反思和改进教学，学生可以及时查漏补缺。

（二）教育性原则

在批改作业时，对作业态度认真、完成质量好的学生应加以鼓励表扬，作业中的新颖解法，特别是有创造性的解法应向全班同学介绍，以培养探究精神；对钻研精神好、努力做到作业独立完成、学习进步大的学生，要给以充分的肯定与支持；对作业不认真完成、明知有错也不改正的不负责任的态度和抄袭作业的行为，要坚决反对与杜绝；对粗心大意、经常出错的学生，要提出批评教育，必要时可把不合要求的作业退回学生，要求认真重做后再交上来；对作业中表现出来的不良学习习惯、思维习惯应设法予以矫正。总之，要通过作业的批改培养学生实事求是、独立思考、言必有据、一丝不苟、严格认真、克服困难、自我检查、有错必纠的精神，促进学生在认知、情感、意志各方面的健全发展。希望能把最普通、最平常的批改作业的过程变成自己与学生无声的心灵交流的过程，寓思想教育于教学之中。

（三）规范性原则

教师批改作业时评价要准确规范。要及时批改作业，要灵活使用作业批改符号，要公正评价学生作业，要多用鼓励性语言评价学生作业，培养学生严谨的学习态度。

学生作业要规范，学生按时独立完成作业，先复习再完成作业，书写要工整、完整、准确。对学生作业要过好四个关：审题关，概念关，逻辑关，语言关。让学生绝不放过一个小小的错误，注意格式规范，对学生作业不认真、马虎应付等不良现象及时指出并责令更正或重做，让学生养成良好的学习习惯。

（四）灵活性原则

批改作业的时间灵活：利用边角料时间或整块时间；批改作业的地点灵活：教室、办公室；批改作业的方法灵活：根据不同的情况，如作业的类型不同、目的不同，本着优化的宗旨，选择适当的批改方

法，具体的方法有：全批全改、面批面改、互批互改、自我批改，此外，还有轮流批改、重点批改等形式。

（五）差异性原则

在作业批改中，坚持差异性原则是指针对优等生、中等生、学困生等不同的对象采用不同的批改态度。对优等生，“吹毛求疵”，使其了解不足之处；对中等生，则多加开导，帮助理清思路；对学困生，则“关怀备至”，期望能唤起他们的上进心。而在批改方法上，特别是学困生，优先批改、优先辅导。对于他们作业中存在的错误耐心讲解，对于他们的微小进步及时表扬，帮助他们树立起战胜困难的勇气和信心。

第三节　数学作业批改的方法

批改作业不仅仅是教学的重要环节，还是师生双方获得信息的重要窗口。认真批改作业，能使师生双方及时接受正确的信息，加快信息反馈的速度。只有师生共同配合，才能真正达到做作业和批改作业的目的，但关键是调动学生的积极性，把师生活动紧密结合为一个整体。

一、数学作业批改的现状

“学生做作业，老师批作业”这种作业处理方式，起于何时，已不可考。现在大多数的地区和学校，还把它作为一种制度固定下来，至今没有多大的改变。中小学数学老师批改作业基本上都是全批全改的模式。湖北大学心理学家黎世法教授在“六课型单元教学法”中公开了他所做的一项研究结果，认为：“背着学生批改作业、作文、评析试卷等等，基本上都属无效的教学措施”[1]。

---

① 杨世明等著. MM 教育方式理论与实践. 香港新闻出版社

有关调查显示，数学作业批改的现状如下。

（一）对数学作业批改的“作用”普遍认同

作业批改是数学作业评价的重要环节，是师生交流互动的一种方式，是评价学生的数学学习效果的重要方式。

上海市浦东的一项调查表明，有36%的数学教师认为批改作业作用“比较大”，有64%的数学教师认为批改作业作用“很大”。[①]

浙江省舟山第一小学曹军等老师采用相同的方法对8所小学做的调查（调查时间：2007年11月至12月）结果类似，见下表：[②]

批改作业的作用

	大			不大	没有
	很大	比较大	卡方检验		
城镇教师	65.3%	26.8%	卡方=3.29 $P>0.05$	7.9%	0
农村教师	72.5%	20.7%		6.8%	0

调查数据显示，无论城镇还是农村教师都清楚地认识到，作业批改和反馈在实际教学中所起作用是非常大的，因为它不仅是教师的工作内容之一，而且也是了解自己教学效果，改进教学方法的一个重要途径。

浦东的这项调查显示，92.9%的家长都能认识到，批改作业不仅是教师的教学任务之一，也是了解学生、检验学习效果的重要手段。94.6%的学生认为作业批改的作用“很大”或“较大”，知道批改作业既是教师了解学生学习情况的重要途径，也是学生获取教师评价的重要方面，同时更是了解、反思自己学习情况的最佳途径之一。批改作业对数学教学与学生发展有着相当重要的作用。

---

① 尹瑶芳. 小学数学作业批改现状的调查分析. 上海教育科研，2006年8月

② 曹军. 小学数学作业批改现状调查与对策思考. 浙江省舟山第一小学网，2009年6月2日

（二）对数学作业的批改“做法”比较陈旧

作业批改是教师教学常规工作之一，很多教师对这一工作已经习以为常，不会经常地、特别地去关注这一工作。对于批改的方式是否适合学生，或是更有效，考虑得不多。

1. 普遍使用“全批全改、精批细改”的方式

浦东的上述调查显示，42％的数学教师采用“全批全改”的方式，54％的教师采用“精批细改”的方式，对学生的作业几乎采用全包的方式，且大部分教师的评价方法比较单一。一直以来，教师认为批改作业是教师的本份工作，一本本作业认真地批改，并写上批改的日期，已经成为一种习惯。

2. 教师花费在批改作业上的时间过多

浦东的上述调查显示，66％的教师每天批改作业的时间为三课时以上。批改好以后还要订正复批，甚至有时有些数学教师复批的时间比初次批改的时间还要长。

3. 没有专门的作业讲评、反馈订正时间

作业反馈是作业批改后一个重要的环节，是引导学生自主反思，进一步巩固知识，查漏补缺的重要方面。大部分的教师、学生作业订正、反馈比较及时，但常利用课间、午间和下午放学时间讲评，没有专门的作业讲评、反馈订正时间。

二、有效的数学作业批改方法

新课改的理念是以学生发展为本，在作业批改上也要体现这一理念，讲效率、求效果。目前部分教师已对作业批改方式进行了新的探索实践。形式多种多样，现按不同分类标准详述如下：

（一）从批改作业的主体划分

作业的批改方法按着批改主体划分可分为：教师为主体和学生为主体两种，教师为主体的批改方法包括：全收全改法、抽批法、阅览法。学生为主体的批改方法包括：自批互改法、讨论式批改、纠错式批改、评价式批改、结对式批改等。

1. 教师为主体的作业批改方法

(1) 全收全改法

全收全改法是长期以来广大教师普遍采用的方法，也是学校教学的基本要求。教师通过全收、全批、全改，可以全面了解学生对已授知识的掌握情况，有针对性地安排后一课程的教学，知己知彼，备好下面的课。学生接到教师批改过的作业本，心里有种踏实感，觉得这次作业任务已完成，已被教师认可，从而期待着去完成下次作业。

(2) 抽批法

教师每次仅抽批一部分作业，记下这些作业中的典型错误并在课堂上进行讲评。讲评后要求未抽批到的学生自行订正作业。学生十分重视教师的作业讲评，并且锻炼培养了他们自我检查和订正作业的能力。

案例:

如，在一次作业中有这么一道题：已知：$x,\ y\in\mathbf{R}^{+}$，$x+y=1$，求 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$ 的最小值。在抽批学生作业时我发现有学生甲、乙两种错误解法：

学生甲解法：$1=x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$，即 $\frac{1}{\sqrt{xy}}\geqslant 2$，$\therefore \frac{1}{x}+\frac{2}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{xy}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{xy}}\geqslant 4\sqrt{2}$，$\therefore \frac{1}{x}+\frac{2}{y}$ 的最小值是 $4\sqrt{2}$。

学生乙解法：将 $y=1-x$，代入 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$，即 $\frac{1}{x}+\frac{2}{1-x}\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{x(1-x)}}$，当 $\frac{1}{x}=\frac{2}{1-x}$，即 $x=\frac{1}{3}$ 时，$\frac{1}{x}+\frac{2}{1-x}$ 的最小值为 $2\sqrt{\frac{2}{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)}}$。

分析一：学生甲用了两次基本不等式，要得到最小值 $4\sqrt{2}$，因为前者在 $y=x$ 时取等号，后者在 $\frac{1}{x}=\frac{2}{y}$ 时取等号，而方程组 $\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{2}{y},\\ y=x\end{cases}$ 无解，所以等号不能同时成立，这种解法是错误的。

分析二：学生乙用了一次基本不等式，而 $\sqrt{\frac{2}{x(1-x)}}$ 不是定值，$\frac{1}{x}=\frac{2}{1-x}$ 必须在 $\sqrt{\frac{2}{x(1-x)}}$ 是定值的前提下，所以这种解法也是错误的。

正确解法为：$\because x+y=1$，$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)(x+y)=3+\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}\geqslant 3+2\sqrt{2}$，当 $\frac{y}{x}=\frac{2x}{y}$ 时，即 $\begin{cases}x=\sqrt{2}-1,\\ y=2-\sqrt{2}\end{cases}$ 时，$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$。

经过“抽批”我了解了学生的出错点，第二天上课让全体同学一起分析两种解法，共同找出错因，并找到正确解法；使学生更进一步加深对用基本不等式求最值应注意的问题。

(3) 阅览法

教师收到学生上交的作业后，快速翻阅，根据作业的重点，归纳学生存在的普遍性问题，以备重点批改。

案例：

在教学中我常常给学生留一些课外思考题，对这些思考题我的做法是：浏览学生的解法，然后讲评。一次我留了如下两题：

(1) 设 α、β 是方程 $x^2-2kx+k+6=0$ 的两个实根，则 $(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$ 的最小值是（　　）。

(A) $-\frac{49}{4}$　　(B) 8　　(C) 18　　(D) 不存在

(2) 已知 $(x+2)^2+\frac{y^2}{4}=1$，求 x^2+y^2 的取值范围。

我浏览学生作业后发现：部分同学(1)选 A；(2)填 $\left(-\infty, \frac{28}{3}\right]$。错因是忽视隐含条件，导致结果错误。为此，上课时我让学生们认清问题，并请同学进行思路分析：

题(1)只有一个答案正确，设了 3 个陷阱，很容易上当。

利用一元二次方程根与系数的关系易得：$\alpha+\beta=2k$，$\alpha\beta=k+6$，所以，

$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=\alpha^2-2\alpha+1+\beta^2-2\beta+1=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+2=4\left(k-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{49}{4}$。

有的学生一看到 $-\frac{49}{4}$，常受选择答案(A)的诱惑，盲从附和。这正是思维缺乏反思性的体现。如果能以反思性的态度考察各个选择答案的来源和它们之间的区别，就能从中选出正确答案。

因为，原方程有两个实根 α、β，所以 $\Delta=4k^2-4(k+6)\geqslant 0 \Rightarrow k\leqslant -2$ 或 $k\geqslant 3$。当 $k\geqslant 3$ 时，$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$ 的最小值是 8；当 $k\leqslant -2$ 时，$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$ 的最小值是 18。这时就可以作出正确选择，只有(B)正确。

题(2)错解如下：由已知得 $y^2=-4x^2-16x-12$，因此 $x^2+y^2=-3x^2-16x-12=-3\left(x+\frac{8}{3}\right)^2+\frac{28}{3}$，所以，当 $x=-\frac{8}{3}$ 时，x^2+y^2 有最大值 $\frac{28}{3}$，即 x^2+y^2 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{28}{3}\right]$。

分析：没有注意 x 的取值范围要受已知条件的限制，丢掉了最小值。事实上，由于 $(x+2)^2+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow (x+2)^2=1-\frac{y^2}{4}\leqslant 1 \Rightarrow -3\leqslant x\leqslant -1$，从而当 $x=-1$ 时，x^2+y^2 有最小值 1。所以，x^2+

y^2 的取值范围是 $\left[1,\ \frac{28}{3}\right]$。

2. 学生为主体的作业批改方法

发挥学生的主体作用，让学生参与批改的过程。

新课改的课程理念是以学生的发展为本。课堂上我们让学生自主探究、自主尝试，让学生学会合作学习、互相学习、做学习的主人。作业的批改中我们也可以去实践这个理念，把学生的作业大胆地放给学生去批改。当然，这个"放"，既要能够让学生唱主角，又要能够让教师完全了解学生的作业完成情况，还要让学生得到发展。在这样的理念指导下，我们可以把批改作业与学生的自我评价、学生间的相互评价相结合，注重加强学生的合作意识，注重培养学生敢于直抒己见、相互争辩的能力。

(1) 自批互改法

新课程强调学生的主体参与，强调评价主体的多元性。怎样让学生来参与作业批改呢？首先要充分调动学生的自评意识，将自批的过程视为自己的再认识、再发展、再完善的过程。具体做法是：把不同水平的学生安排成前后两桌，每四人组成一个小组，选学习认真的学生为组长。在教师提出批改要求后，组长负责取组内一人的作业为"示范作业"大家逐题研究，集体批改，然后进行自批和互查。同时，另选几名数学"尖尖者"组成信息小组，其主要任务是：(1)对班上作业中出现的典型错题进行"会诊"，分析错误原因，提出正确答案供学生参阅；(2)收集作业中做题方法新颖巧妙、思路简捷、一题多解等典型范例，及时向全班进行交流。这样，学生成为批改作业的主体，那么教师的主导作用是不是就不存在了呢？不是的，因为每组讨论中所出现的问题和一些新颖的解法都要及时反映给教师，教师是评判与点拨者。当学生的自批获得老师的肯定时，他的自信心将得到进一步加强；当学生发现自批与教师的批改有出入时，便能产生心理反差，促进反思与理解，从而将批改变为自主参

与、自我反省、自我教育、自我发展的过程，使学生变被动为主动，使教师变独角演员为导演，充分调动了师生双方的积极性。

杨佳慧博客[①]：

今天我来批作业

今天，王老师让我批作业！好棒、好棒！我当然先看我的喽。我用红笔把所有的题都仔仔细细地看了一遍，看完后，发现我的卷子上全是“耐克的标志—对勾勾”啦！

好棒、好棒！哦哦！……

这是8岁的济南小朋友在她的博客中写下的对自批作业的肺腑之言，从中可以看到她的兴奋，看到她对自批互批作业形式的认可。

（2）讨论式批改

在作业中有时会出现个别同学的解题过程很特别，很简略，而结果是正确的；有时又会有学生不满足于教师对某些知识的讲解和对个别数学问题的解决，于是发生向教师“刨根问底”，甚至出现“标新立异”的见解的情况。

这是一种结果的偶然巧合还是一种新颖别致的想法呢？面对学生的特殊表现和正常的求知欲，教师可以把这一切再还于学生，给予一个让学生讨论争论知识的机会。讨论式批改就适用于这类题量不大，题解灵活，往往有多种解法，有一定难度的题目的批改。

教师可以先让学生试着独立批改，再让他们说说批改的情况，你认同你手中这本作业的做法吗？有不同意见和想法吗？你是怎么想的？由此展开班级大范围的辩论，最终肯定正确的做法，指出错误做法的错因。

---

① 杨佳慧博客，http://www.61bay.com/d803226 - ailuo

通过师生之间、生生之间的交流，议论与争辩常常能达到发现问题、解决问题、互相启发、互相促进，共同提高的目的。

案例：

讨论式数学作业批改方法实录一（对一道数列题的讨论）

题目：已知两个等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和分别为A_n、B_n，且满足关系式$\frac{A_n}{B_n}=\frac{7n+1}{4n+27}(n\in \mathbf{N}^*)$，求$\frac{a_{11}}{b_{11}}$。

学习小组长：下面我们来讨论一下这道数列题，哪一位同学先说一下自己的解法？

学生甲：我的解法是：

$\because \frac{A_n}{B_n}=\frac{7n+1}{4n+27}$，

$\therefore$ 可设 $A_n=(7n+1)k$，$B_n=(4n+27)k\ (k\neq 0)$。

则 $a_{11}=A_{11}-A_{10}=(7\times 11+1)k-(7\times 10+1)k=7k$，

$b_{11}=B_{11}-B_{10}=(4\times 11+27)k-(4\times 10+27)k=4k$，

$\therefore \frac{a_{11}}{b_{11}}=\frac{7}{4}$。

学生乙：我的解法是：

$$\frac{a_{11}}{b_{11}}=\frac{2a_{11}}{2b_{11}}=\frac{a_1+a_{21}}{b_1+b_{21}}=\frac{(a_1+a_{21})\frac{21}{2}}{(b_1+b_{21})\frac{21}{2}}=\frac{A_{21}}{B_{21}}$$

$$=\frac{7\times 21+1}{4\times 21+27}=\frac{4}{3}。$$

学习小组长：甲、乙两个同学用两种不同的方法得出了两个不同的答案，同学们有什么意见？

（学生们自己思考，然后讨论）

学生丙：我认为甲的解法是错误的，因为等差数列的前n项和

公式 $S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$ 在 $d\neq 0$ 时是关于 n 的常数项为 0 的二次函数，显然本题中 $d\neq 0$。但甲的解法中设 $A_n=(7n+1)k$，$B_n=(4n+27)k\ (k\neq 0)$ 时，把 S_n 视为 n 的一次函数，改变了公式的本质特征从而导致错误。

学生甲：对呀！我怎么忽视了公式的本质特征呢？

学习小组长：甲的思路可行吗？能否修改一下甲的解法？

学生丁：可以这样改：

设 $A_n=(7n+1)nk$，$B_n=(4n+27)nk\ (k\neq 0)$ 再仿甲的方法求出 a_{11}、b_{11}，得 $\frac{a_{11}}{b_{11}}=\frac{4}{3}$。

学习小组长：丁修改的相当好，通过本题的讨论我们有哪些收获？

学生甲：等差数列的前 n 项和公式 $S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$ 在 $d\neq 0$ 时是关于 n 的常数项为 0 的二次函数，以后我不会出错了。

学生丁：乙的解法也很不错，他巧妙地应用了等差数列的性质，通过讨论我们学到了两种解法。

(3) 纠错式批改

纠错式批改其实就是一个再作业的过程。这种方法主要针对一些重点难点和特别容易混淆的概念、容易出错的习题。这类题目往往不是特别难，学生能发现错误，但又特别容易错，如小数的四则混合运算、高中的等比数列求和公式等，一般需要重复的练习。教师如果把对一次练习的批改作为其中的一次重复练习，就既不会额外加重学生的负担，又能得到大于一次普通练习的学习效果。

纠错式批改的重点是纠错。学生要把同学做得对的地方圈出来，把错的地方摘录下来，写出同学共错几题，并针对同学详细的做法详细地写出他错误的原因，并在一旁改正。教师就只需浏览一下这些分析表，就能掌握学生错得最多的类型，随时调节教学方法。而

学生在分析别人的过程中又深刻地理解了一遍知识，也培养了他们的纠错能力，增强对错误的“免疫能力”。实际的实施是灵活的，对于某些较难发现的错误，教师要随时给予帮助，而一些容易纠正的错误，则完全可以放手让学生自已改正。我们的学生是非常灵活的。

纠错式批改法告诉学生，不能只轻易满足于答案是否正确，而忽视解题的思维过程，纠错重要的是要纠出错因。

案例：

请同学们看学生甲的作业是否正确？如有错误请指出错在何处？

题目：设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n。若$S_3+S_6=2S_9$，求数列的公比q。

学生甲解法：$\because S_3+S_6=2S_9$，$\therefore \frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=2\cdot\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}$，整理得：$q^3(2q^6-q^3-1)=0$。由$q\neq 0$得方程$2q^6-q^3-1=0$。$\therefore (2q^3+1)(q^3-1)=0$，$\therefore q=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$或$q=1$。

学生乙：在甲解法中，由$\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=2\cdot\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}$，整理得：$q^3(2q^6-q^3-1)=0$时，应有$a_1\neq 0$和$q\neq 1$。

在等比数列中，$a_1\neq 0$是显然的，但公比q完全可能为1，因此，在解题时应先讨论公比$q=1$的情况，再在$q\neq 1$的情况下，对式子进行整理变形。

学生丙：正确解法　若$q=1$，则有$S_3=3a_1$，$S_6=6a_1$，$S_9=9a_1$。但$a_1\neq 0$，即得$S_3+S_6\neq 2S_9$，与题设矛盾，故$q\neq 1$。又依题意，$S_3+S_6=2S_9\Rightarrow \frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=2\cdot\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}\Rightarrow q^3(2q^6-q^3-1)=0$，即$(2q^3+1)(q^3-1)=0$，因为

$q \neq 1$，所以 $q^3 - 1 \neq 0$，所以 $2q^3 + 1 = 0$。解得 $q = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$。

师：此题为1996年全国高考文史类数学试题第21题，不少考生的解法同错误解法，根据评分标准而痛失2分。均为以偏概全，导致错误。以偏概全是指思考不全面，遗漏特殊情况，致使解答不完全，不能给出问题的全部答案，从而表现出思维的不严密性。

（4）评价式批改

评价式批改法，主要是为了鼓励学生的作业积极性。教师不可能经常花大量的时间大面积地鼓励评价学生。让学生互相评价，生生互动，就可以很好地解决这个问题。

学习本身是一项复杂的认识、实践活动，造成一些学生作业水平低的因素是多种多样的。要想使困难生改变现状，取得大的进步，不是一蹴而就的事情，而优等生也时常会遇到一些意想不到的困难。因此，可以采取客观评价与鼓励上进相结合的批改策略。这主要针对一些与新课同步的常规性练习。在学生通过小组校对批改出对错后，要求他们在作业下面写上一句或者几句评语。主要写“你的……值得我学习”、“你这道题做得真好”、“你做得比我好”之类鼓励性的评语。虽然是同学的评价，却也会让很多同学兴奋不已。

案例：

“设计联欢会活动方案”的评价[1]

我们结合数学实践活动课的教学，让学生从三个方面设计联欢会活动方案：(1)确定联欢会的名称，安排活动内容。(2)列出需要

---

① 杨道吉.华中科技大学附属小学，http://eblog.cersp.com/UploadFiles/2009/4-24/424345788.doc

准备和购买的物品清单。(3)算出总活动经费和人均活动经费。下面是一位学生“联欢会活动方案”的自评、他评、师评过程。

方案设计者：我设计的是“迎新年联欢会”。第一部分是节目单，有小品、独奏……。第二部分是会场布置图，会场中心是表演区，四周是观众席，“比卡丘”图案代表主持人的位置，会场上方用气球、彩带等进行装饰。第三部分是购物清单，有瓜子、桔子等食品，笔袋、本子等奖品，彩带、气球等会场布置用品，我在鲁广和华工小商品市场做了价格调查，预算金额为110元，人均约2.2元。我认为我的设计符合设计要求，做预算时，人均费用较低。由于进行了价格调查，使预算方案真实可行，我申请评为“甲”。

生1：我认为他的设计考虑得很全面。

生2：他设计的节目太少，建议安排一点游艺项目，并估计一下整个联欢会大约需要多少时间。

生3：他的会场布置图画得很好，购物清单使人一目了然。

生4：我本想验算“人均约2.2元”的计算是否正确，但他没有说明参加联欢会活动的人数。(本班学生50人)

师：你的设计符合设计要求，绘制的会场布置图与众不同，老师特别欣赏你在做预算之前进行的市场价格调查，建议你在确定食品购买方案之前，调查一下本班学生喜欢吃的食品种类。同意你的申请，评定等级“甲”。

(5) 结对式批改

结对式批改所针对的面比较窄，一般由学习优秀的同学来批改一些学习有困难同学的作业，以此促进学生间的相互帮助，相互学习。

这首先需要教师培养一批能干的学生，教师经常做一些示范和讲解就可以了。结对式批改的一个方法就是暂时不加以评判等级。学生的知识基础、智力水平和学习态度是不平衡的。当学生的作业错误过多、过严重时，为了避免学生作业等级太低、心理压力太大，可以暂不评判等级，而是加以眉批：“请参考××例题后重做。”指导

他去复习课本上的同类例题。等学生弄懂了算理，把错题纠正以后，再进行评判。这样，学生既弄清了错误的原因，补充了所欠缺的知识，又避免丧失信心。

结对式批改最常见的形式是学生间的当面批改和指导。其实质是优秀学生代替老师进行面批。在批改中，优秀生又梳理了一遍思路，使解题思路更清晰，解题方法更凝练，而同学的辅导，同学的语言又更能让困难生接受。在这种批改方式的实践中，教师要注意的是既要让优生对此充满兴趣，毫无怨言，又要使困难生喜欢来自同学的辅导，不觉得丢脸。还可以采用"拜师法"，让困难生在一定的范围内自由选择结对拜师。被选择的优生就有了一份责任感和喜悦感，同时，一旦困难生有进步，教师就要加以表扬，更要表扬他的"师傅"。

案例：

我班的王某为人很诚实，但做事马虎了事，作业的错误率很高。若你跟他讲，他又都懂。于是我就说："你的作业以后每天在中饭后由你最要好的也是最优秀的夏同学当面批改。"面批时，指出错误原因，对必须掌握的题目，重新出几道类似的题给他做，直到掌握为止。经过一段时间后，王某成绩提高得很快，由原来的45分跳到及格行列。这时的他马上有点自满了，要面批时，却找不到他。问其原因，他说："现在我的作业没什么问题了。"又过了一段时间，他的成绩又退下来了。于是他自己主动找夏同学，问："你会像以前一样再帮我批改吗？"夏同学说："现在答应你，但你也要答应我一件事，行不行？"他很爽快地答应了。在以后的日子中，王某对自己的学习充满了信心，几次测验都有很大的进步，夏同学的成绩也有更大的提高。

（二）从批改的范围分

长期以来，描绘教师的敬业精神常常用批改作业来形容，好像作业批改越多越敬业，批改越细致越负责。而我们觉得无需每次作业平均用力去批改、去精雕细刻，只要能想办法达到让学生自我反

思、自我评价的目的就行了，因此可以采用精批和略批相结合的方法：课堂作业，对优生就可略批，对后进生就需详批；家庭作业，可以按组抽批，也可以让组长协助批；有的家庭作业可只检查做没做，然后再集体讲评，让学生自我判断对不对；对有的学生，我们建立免批作业制度，而对有的学生就必须实行作业跟踪制。平时我们注意缩小批改的重点，寻找批改的焦点，有的专项批改，有的分层选择批改，有的随机抽取批改，长此以来，孩子们从批改中获得了一些较为集中而非零散的收获，而我们也既做到了较为全面地把握学生的学习情况，及时调控自己的教学行为，又真正减轻了自己批改作业的负担。

从批改作业的范围分，作业批改可以分为如下几类：

1. 全收全改

教师将学生做完的作业收齐后逐份批改，不但全面检查学生作业的完成情况，而且对学生作业中的错误基本上都加以改正，或者指出其错误要求学生自己纠正，教师再检查。这种方法在平常的作业批改中经常用到。

2. 全收半改

教师把作业收齐后，对全部作业作一番浏览，而对部分学生的整份作业或全体学生作业的一部分题目进行详细批改。

3. 零作业批改

“零作业批改”是指教师把作业批阅权归还给学生，把自己用于批阅作业的时间转移到研究学生作业中出现的问题并加强个别指导上。

案例：

论中学教师“零作业批改”[1]

一、实行“零作业批改”的现实意义

“零作业批改”（本文限于中学教师）是指教师把作业批阅权归

[1] 熊川武．论中学教师“零作业批改”．中国教育学刊，2007年第5期

还给学生，把自己用于批阅作业的时间转移到研究学生作业中出现的问题并加强个别指导上。就我国中学教育而言，实施“零作业批改”具有如下意义：

（一）让学生真正学会学习

较之“零作业批改”，“全批全改”在促进学生学会学习方面的功能较弱。经过教师仔细批改的作业，给学生提供无需思考的现成解题过程和答案，易使部分学生养成简单的死记硬背习惯。而且，教师改正学生作业中的错误，实际上是越俎代庖，减少了学生通过自己纠正错误而得以发展的机会。

（二）促进教师“质性”敬业

教师的敬业精神可以从“量性”和“质性”两方面加以审视。前者主要以牺牲休息、起早贪黑、任劳任怨等为标志；后者则以勤于思索、探究奥秘、坚持巧干等为特征。对于当代的教师来说，前者诚可贵，后者价更高。实施“零作业批改”，教师可以有更多的时间用于“研究”学生的学习问题，通过潜心探索，发现解决学生问题的巧妙方法，变苦干为巧干。

（三）丰富中学教育的人文和科学价值

按现行的中学教师教学工作量计算，每个教师一般要教两个平行班（一般约 100 名学生，但有不少高中每班的学生额在 80 人左右），每天用于批改学生作业的时间至少要两小时，加上授课两课时、备课两小时以及管理班级、完成学校临时安排的工作，教师每天工作要超过 8 小时。他们经常不得不把在学校里无法做完的事情带回家，夜以继日地干。

教师负担过重是学生负担过重的直接原因之一。当教师的负担重到他们没有或很少有时间来研究学生的学习问题时，教师就不能准确地把握自己的教学效果，工作的焦虑度就会相应上升，于是通过让学生做大量练习来保证起码的教学水准便成了他们聊以自慰的选择。

“零作业批改”的旨趣在于用更人文、更科学的思想和方法实现

中学教育的“低耗高效”。随着相关研究的逐步深入，“零作业批改”解放教师、福祉学生的价值将会得到充分显现。

二、“零作业批改”的实施环节

在实施“零作业批改”的过程中，教师要确保自己和学生能及时获得有关作业情况的反馈信息。教师有必要帮助学生形成正确的认识和习惯，掌握较完整的策略。

（一）对学生进行培训

教师要组织一定数量的尝试性批阅，从中发现易出现的问题和有关规律。

（二）在课堂上互批作业

互批或自批作业最好在课内进行。

（三）学生各自标记“作业问题”

互批后的作业本要当即返回给作业者本人，由作业者本人在作业本上对做错的题进行标记（标记在作业本两侧的空白处，要做到整齐规范、一目了然），即做问题记录。

（四）教师课后抽查学生作业并做问题记录

教师只抽查那些被作为跟踪（指导）对象的学生的作业，一般在15人左右（优等生、中等生、学差生各5人），并做相关的作业问题记录。

（五）对作业问题实行双重跟踪

所谓“双重跟踪”，就是学生和教师一起跟踪作业中出现的问题。

“零作业批改”每个环节的实施都离不开教师的指导。可见，“零作业批改”不是让教师放弃责任，而是要求教师把精力用于更具体、更扎实、更有效的工作上。

三、“零作业批改”实施的效果

实施“零作业批改”，能够减轻师生负担，增加师生交往频率，提高教学质量，增强师生的幸福感。

综上所述，“零作业批改”不仅改变了现行的作业批改方式，同

时也引发了课堂教学的变革。它使学困生普遍进步，学优生更优，全体学生齐发展，为师生实现教育幸福开辟了更广阔的道路。需要注意的是，“零作业批改”也不能盲目地、机械地加以运用，尤其不能将其视为纯教学技术，而忽略学生的感情等人文方面。实验表明，只有坚持“感情先行”，把关爱学生放在教学的重要位置上，用感情驱动并调节教学中的认知活动，学生互批或自批作业才能到位，教师个别指导才能更有成效。

（三）从批改的视角分

从教师批改作业的关注点分，批改作业的方法可分为如下三类。

1. 关注知识

我们大多数教师批改作业的目的主要是关注学生作业的对错、知识的掌握程度，通过批改作业，教师能够及时了解学生掌握知识的情况，矫正学生学习过程中的失误，弥补知识的缺陷，激发学生学习数学的兴趣和热情，促使学生形成正确的学习态度和良好的学习习惯。

2. 关注思维过程

新课程理念下的作业批改，在关注知识的同时，还要关注学生在作业中所折射出来的思维过程与方法。我们坚持从不同的角度全面衡量，关注孩子们作业中飞扬的个性及成功的体验。

案例：

如练习“$8+8+8+7=31$”时，有个孩子不仅写出了一般的计算方法，而且写出了多种简便方法：方法1：$8+8+8+7=8\times3+7=31$；方法2：$8+8+8+7=8\times4-1=31$；方法3：$8+8+8+7=7\times4+3=31$。改到这儿时，我按捺不住心中的喜悦，提笔在答案旁边写下：“你的想法真多，很了不起！”

像这样，我们不只是批改学生作业的正误，而且注意学生或简捷明快或繁琐曲折的解题思路和方法，并利用批语，开拓学生的思路，培养自主学习能力，开发学生的潜能，激活创新意识，使学生的创造过程与方法尽情地在作业中彰显！

3. 关注情感、态度与价值观

学生的学习努力程度，是学生情感与态度在学习过程中的表现。一般说来，在完成相同学习任务时，学习困难的学生要比优等生付出的努力更大一些，因此在批改作业的过程中，我除了对那些有正确答案且表现突出的学生给予简短激励性的批语外还给那些同样付出努力却得到错误答案或得不出答案的学生以鼓励，告诉他们不要灰心，消除其自卑，激发其斗志，树立其信心，用我们期待的目光，使他们较快地进入一种良好的学习状态，以引领学生从作业走向社会、走向人生。

苏霍姆林斯基曾说：对学生的教育是无时无刻的。作业不仅是教师了解学生学习情况的方式，也应成为教育学生的重要手段，传递师生感情的重要纽带。[①]

(1) 鼓励式批改

学习是一项复杂的认识、实践活动。不可否认每个班级总有几个后进生，其后进的表现之一就是作业的质量低，要想使他们改变现状、取得大的进步，不是一蹴而就的事情。应该说造成一些学生作业水平低的因素是多方面的，那么教师是否可以把批改作业也作为转差的重要途径呢？为此，我们批改作业时尝试采取客观评价与鼓励上进相结合的批改策略。当学生通过努力，在作业的某些方面有所进步时，或者在特殊困难面前没有退缩，能照常完成作业时，就可以不失时机地适当抬高评价等级，对他们进行鼓励，使其体会到战胜困难、获取成功的快乐，从而提高完成作业的积极性。

---

① 王东梅. 七年级数学作业批改有效性的实践及思考. 2006 年杭州市数学会评选论文

（2）协商式批改

作业中常会出现一些令教师疑惑不解的情况。如一个知识基础较差、智力水平不高、平时作业不认真的学生，有时却做得很好，他是有了突出进步，还是搞了虚假作业呢？一个向来作业水平较高的同学有时却做得很差，这就很可能是特殊情况造成的。又如，有的同学解题过程很特别，很简略，而结果是正确的。这是一种结果的偶然巧合，还是一种新颖别致的解法呢？为了实事求是地批改作业，不伤害学生的自尊心和作业积极性，同时防止抄袭作业现象的发生，我们采取协商式批改，当面了解具体情况，与之协商批改的策略。在这过程中，常能有意外的发现，或是学生思想上的问题，或是学生解题的创新思路。教师可根据具体情况采取相应策略，对学生有创意的解题方法给予表扬，并让其在班中介绍思路或方法，鼓励大家做作业时都能开拓思维，求实创新。

（3）延缓式批改

学生的知识基础、智力水平和学习态度是不同的，应允许一部分学生经过一段时间的努力达到相应的目标。为此，教师可以采取第二次评价或暂不评判等级的方式。这种“推迟判断”淡化了评价的甄别功能，突出了学生的纵向发展，使学生看到了自己的进步，感受到了获得成功的喜悦，从而激发了学生的学习热情。

案例：

童某的进步

童某是一个外地的学生，升入初中时数学只有22分，反应比较迟钝。开学初叫她写一篇介绍自己家乡的文章，她只写了两三句话。平时上课叫她回答问题时，她往往听不清楚老师说的话，老师要重复一遍。如在做比较大小的作业时，她把一个比较大小的题目都做错了，而且都正好与答案相反。显然，这不是由于单纯的粗心所致，而是没有弄清算理。这时，我就对她的作业暂时不评等级，指

导她去复习课本上的同类例题，并加以眉批："请参考××例题后重做。"等她弄懂了算理，把错题纠正以后，再进行评判。等我把评判结果给她后，她由衷说了声："谢谢老师！"在以后的数学学习过程中，我发现她改变了很多。她把自己有疑问的问题做一个记号，下课就马上问老师，作业的准确率也明显提高，几次测验进步也很大。一些学生怀疑她是抄别人的作业，内向的她压力很大，学习热情减退，作业开始乱做，或干脆作业空白就交上来。发现这个问题之后，我及时做她的思想工作，当着全班同学的面充分肯定了她，表示相信她的作业是自己做的，成绩是真实的，同时希望她继续努力，争取更大的进步。此后，她做作业更加认真，课堂上发言更踊跃。期末考前，我及时检查她的复习情况，同时鼓励她要对自己有信心，结果期末考试她考了 73 分。

（4）自省式批改

自省式批改就是让学生在自己的作业中，积累自己的错误并进行分析和改正，进一步查漏补缺。学生们把自己的错误进行分类，整理在一个作业本上，这个不同一般的作业本，有的被取名为"数学医院"，有的被取名为"数学病历卡"、"马虎的故事"等等。教师对学生的作业，只在过程和结果正确的题目上打对勾，而对那些过程和结果错误的题目，如错误带有全局性的则用"——"将它划出来，如错误是局部性的则用"?"表示。做这样一些记号的目的，就是让学生自己去寻找错误原因，根据错误进行有针对性的反省，反省的内容是：错在哪里，为什么出错，现在能否正确解决等。当学生完成反省后，教师要求学生将正确的解题过程和结果写在另备的本子上，本子的名字由学生自取，所以就有了上述的种种名字。教师在批改的过程中，还应因人而异地写上各种各样的批语。为了巩固每天的反省效果，进一步强化成功，教师还可以引导学生每周写反省周记，形成了反馈习惯和反省能力，这种习惯一旦养成，将终身受益。如果有谁一周没有错误，就被评为数学明星。这种批改方式的尝试，

提高了学生学习策略水平，让学生学得更明白更主动，“纠错”和“强化成功”相辅相成，效果显著。

(5) 面批法

批改学生作业的目的重在了解学情、了解教情，重在及时反馈，传统的统一批改形式已经不适合现在课程改革后的教学。如，当你批改过程中发现了个别学生做得特别差，想跟他单独交流时，或学生有很好的解法，想与学生分享时，就常常由于学生不在身边而作罢。这样学生作业中出现的问题不能及时加以改正，就算到了下一次上课，专门用几分钟时间来评讲作业并要求学生及时改正，但仍有学生会再次出现差错。“面批”是提高作业批改有效性的很好的方法和途径。

具体做法是这样的：准备批改某学生的作业时，就请这个学生上来，让他看着教师批改，对的打勾，错的则划上横线，不打叉，批改完后把作业还给他，让他先自己分析错误原因，继续下一位同学的批改，批改完下一位同学的作业后再听他叙述错误原因，然后再指出他思考不当或不周之处。这样既给了学生再次探究解题的空间，教师又能清楚造成学生出错的根本原因。面批着实提高了订正质量，具备了“有效性”。

案例：

面批主要解决下列问题（上海市华东模范中学成梁老师提供）

① 指出解题疏漏

问题1：已知$\{a_n\}$为无穷等比数列，S_n为$\{a_n\}$的前n项和，若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=1$，求公比$q$的取值范围。

面批指导：在学生的解法中，等比数列求和时常常忽略了$q=1$的情况。在数列中常见的错误有：等比数列求和时忽略对公比q进行分类讨论，公式$a_n=S_n-S_{n-1}$使用时不注意$n\geqslant 2$的条件等。

提供巩固练习：已知数列$\{a_n\}$，其通项公式为$a_n=a^n$，求$\{a_n\}$的

前 n 项和 S_n。

教师上课时对这类常见的错误要提醒学生多加注意，适当地安排部分习题让学生练习，并提醒学生做完作业认真检查，养成全面考虑问题的习惯，能有效地避免解题过程中的疏漏，克服思维的片面性。

② 剖析题意

问题 2：已知函数 $f(x)=\lg(ax^2+2x+1)$ 的值域为实数集 $\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围。

面批指导：不少同学对此问题并不理解，把问题错误地理解为函数的定义域为 $\mathbf{R}$。$f(x)=\lg(ax^2+2x+1)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，即 $u=ax^2+2x+1$ 可以取到 $(0,+\infty)$ 中的一切实数，再结合 $u=ax^2+2x+1$ 的图象来解决问题。

提供举一反三问题：已知函数 $f(x)=\lg\left(x+\dfrac{4}{x}-a\right)$ 的值域是实数集 $\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围。

学生掌握起来有困难，老师要多一些耐心，最好老师要准备相类似的问题给学生加强练习。

③ 巩固基本方法

问题 3：已知抛物线 $y^2=4x$，经过焦点 $F(1,0)$ 的直线 l 和抛物线交于 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，且 $x_1+x_2=6$，求线段 AB 的长。

面批指导：学生先求直线方程，再利用弦长公式求解。考虑到直线 l 过抛物线的焦点这一特殊性，使用抛物线的定义更加方便。

提供巩固练习：已知抛物线 $y^2=4x$ 和其准线 l，点 $A(4,1)$，P 为抛物线上一动点，求 P 到定点 A 和到准线距离之和的最小值。

对于学习比较困难的学生，老师在面批时要注意多多鼓励学生，最好让学生自己体会不同方法的优劣。

④ 强调公式、定理、法则等适用条件

问题 4：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$。

面批指导：极限的四则运算法则只适用于有限项情形，若不加分析地用到求无限项极限就错了。可再提供错误以下解法供学生改正：

解方程：$\log_2 x^2 = 2$。解：$2\log_2 x = 2 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$。

概念、公式、法则是教学中的重点，在进行这部分内容教学时要多给学生时间思考。同时，可以围绕概念、公式、法则进行辨析。

在面批的过程中，老师和同学加强了沟通，形成了良好的师生关系，学习困难学生不再躲着老师，碰到困难能够主动向老师请教。对于数学学习有了一定的热情，不少同学的数学成绩稳中有升。

根据作业面批结果，老师提供矫正性作业，要求学生独立完成，提高学生完成作业的积极性和主动性。

(6) 评语式批改

有人说："教师的语言如钥匙，能打开学生心灵的窗户；如火炬，能照亮学生的未来；如种子，能深埋在学生的心里。"教师怎能吝啬自己的金玉良言呢？以前，我们总是在学生的成绩单上、作文的末尾处看到教师的评语，而数学作业的批改比较单一枯燥，缺乏师生情感和思想的交流，缺乏激励性语言。利用评语可以弥补数学作业批改的不足。

① 评语指导，思考改错

当学生作业中出现审题、计算、观察、分析、判断等方面的错误时，可以用评语指导学生对自己的解答过程进行回顾、检查，找出错误原因及正确的解答过程。如学生解题时出现理解性错误，写上"认真审题，弄清题意，再解题好吗?"学生根据评语能很快找出错误原因，并能因此留下深刻的印象。

案例：

一个学生的作业思考改错

题目：求过点(0, 1)的直线，使它与抛物线 $y^2 = 2x$ 仅有一个交点。

学生丁的解法：设所求的直线方程为 $y = kx + 1$，则

$\begin{cases} y = kx + 1, \\ y^2 = 2x, \end{cases}$ 消去 y,得 $(kx+1)^2 - 2x = 0$。

整理得 $k^2x^2 + (2k-2)x + 1 = 0$。

∵ 直线与抛物线仅有一个交点,∴ $\Delta = 0$,解得 $k = \frac{1}{2}$。

∴ 所求直线为 $y = \frac{1}{2}x + 1$。

教师批语:思考以下三点:1. 直线方程 $y = kx + 1$ 成立的条件是什么? 2. 直线与抛物线只有一个交点有几种情况? 3. 若将直线方程与抛物线方程联立后得一个一元二次方程,要考虑它的判别式,对它的二次项系数有何要求?

通过学生思考使学生明确以下三点,并改正如下:

第一,设所求直线为 $y = kx + 1$ 时,没有考虑 $k = 0$ 与斜率不存在的情形,实际上就是承认了该直线的斜率是存在的,且不为零,这是不严密的。

第二,题中要求直线与抛物线只有一个交点,它包含相交和相切两种情况,而上述解法没有考虑相切的情况,只考虑相交的情况。原因是对于直线与抛物线"相切"和"只有一个交点"的关系理解不透。

第三,将直线方程与抛物线方程联立后得一个一元二次方程,要考虑它的判别式,所以它的二次项系数不能为零,即 $k \neq 0$,而上述解法没作考虑,表现出思维不严密。

正确解法:① 当所求直线斜率不存在时,即直线垂直 x 轴,因为过点(0, 1),所以 $x = 0$,即 y 轴,它正好与抛物线 $y^2 = 2x$ 相切满足条件。

② 当所求直线斜率为零时,直线为 $y = 1$ 平行 x 轴,它正好与抛物线 $y^2 = 2x$ 只有一个交点。

③ 一般地,设所求的过点(0, 1)的直线为 $y = kx + 1(k \neq 0)$,

则 $\begin{cases} y = kx + 1, \\ y^2 = 2x, \end{cases}$

∴ $k^2x^2 + (2k-2)x + 1 = 0$。令 $\Delta = 0$,解得 $k = \frac{1}{2}$,∴ 所求直线

为 $y = \frac{1}{2}x + 1$。

综上，满足条件的直线为：$y = 1$，$x = 0$，$y = \frac{1}{2}x + 1$。

② 评语激励，增强信心

"评价应注重学生发展的进程，强调学生个体过去与现在的比较，通过评价使学生真正体验到自己的进步。"当基础比较差的学生解出题目的前半部分时，应该激励："你一定行的，再想一想就能想出来了！"此外，"你的字写得真漂亮！"，"你好棒啊，这次的练习全对了！"，"真聪明，这么有创意，上课大胆一点说出你的想法就更好了"等语言既让学生信心倍增，学生又很乐于接受教师提出的殷切期望。

案例：

一年来，我们对几位学困生采用激励性语言，收到很好的效果。如我所教的一位学生刚进初一时只有 57 分（百分制），但根据作业情况，我每天给予他不同的评语。经过一年的努力，现在该生学习积极性很高，上课经常举手，初一第二学期的几次测验成绩均列入优秀行列。

③ 评语点拨，拓宽思路

利用评语适当给予点拨，以帮助激发学生的潜能，激活创新意识。如"一题多解"培养学生从多种角度、不同方向去分析、思考问题，使学生能正确、灵活地解答千变万化的应用题。利用评语"解得巧、方法妙"肯定有独特见解的学生。

案例：

在实践中，我发现在作业批阅中采用激励性的评价方式，利用作业评语对学生进行学法的指导和鼓励，是描述学生作业水平，便

于学生更清楚地了解自己作业中的优缺点，并和他们进行情感交流的一种有效的方式。

例如，有一位学生在计算 $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ 时，过程为：

$(3-2\sqrt{6}+2)(3+2\sqrt{6}+2)=(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})=25+10\sqrt{6}-10\sqrt{6}-24=1$。

我给她评了 B(相信你有更好的方法，请再想一想！)，学生补了一种算法：

$(3-2\sqrt{6}+2)(3+2\sqrt{6}+2)=(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})=5^2-(2\sqrt{6})^2=25-24=1$。

我把对她的评价提高到 A(相信你还能有所发现！)，并在题目中 $(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ 和 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ 下边分别画了红线，以作提示。果然，学生又补了一种算法：

$[(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})]^2=[(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2]^2=(3-2)^2=1$。

我又把对她的评价提高到 A＋(好样的！)，并给了一个“good!”。

这样的评价，大大地拉近了我和学生之间的距离，促进了思想上和情感上的沟通与交流。我觉得，对于学生的作业，教师应该坚持尊重学生、适度引导的原则，应最大限度地发挥学生的主体作用，不应对学生作业过程进行轻易地否定或批评，要尊重学生的发现，保护和激励学生的探究欲。思维的火花往往会在开放的环境中产生，也只有在尊重学生的想法与选择的情况下，学生才有可能放开思维，发挥创造力。

（上海市民立中学　陈洁玉　提供）

④ 评语浸润，养成习惯

教师在学生的作业书写、格式以及算理过程方面要严格把关。这些是体现良好学习习惯的外在标准，及时用恰当的评语指出作业中的不足之处，学生易接受并随之加以改正。例如，“你很聪明，如

果字再写得好一点，那就更好了！”“结果正确，但格式正确吗？”“聪明的你，一定能发现简便方法！”等。对于学生由于粗心出错，首先要肯定其长处，增强自信，再提出殷励希望，改正缺点。如，“搬开你前进的绊脚石——粗心，奋勇前进！”“希望你告别粗心，与细心交朋友哦！”“你的字写得可真漂亮，要是能提高正确率，那肯定是最棒的！”或者“再细心一些，准行！”这样，一方面不打击其自信，另一方面使其纠正不良倾向，培养严谨的治学态度。

案例：

学生沈某脑子很灵活，但很懒散。如写字潦草，自己都认不出来，几乎每道解答题都没有格式。若老师与他多交流，他就会认真点，但是过几天又会是老样子。于是，我就根据每天不同的情况给他写不同的评语。经过一个学期的努力，这位学生终于改掉了不好的习惯。

（四）从批改评价的角度分

1. 横向评价批改：常见作业的批改，教师总喜欢以横向的纬度来评判学生。这一次，全班同学谁的作业正确，谁解法巧……然后在横向比较中打出等第，拉开档次。

2. 纵向评价批改：孩子要和同伴比，但更重要的是要和自己比，战胜自己，超越自己，便是最大的进步。我们在作业批改时既将他们的作业放在横向的共性中来查漏补缺，寻找差距，又将其放在纵向的个性中去放大亮点，扬长避短。

案例：

学生刘某书写潦草，偶有一次稍稍工整，虽然与其他人比还相差甚远，但我会毫不犹豫地给一个“优”，并写上“有进步！”，因为这毕竟是他的一次小小超越；有的孩子想出了一种解法，我便给他打上一个

“优秀”;而有的孩子想出两种解法,但凭他的实力还可发现更新的、更简捷的解法,所以给优秀的同时我们会再送一个“?”,以启迪思考,寄予期待。

三、数学作业批改方法运用的原则

以上是目前大多数数学教师正在使用和尝试的数学作业批改方法。要想使作业批改效益最大化,符合课改的要求,利于学生的发展,单独使用哪一种方法都不可能满足要求,为此应该因课、因师、因生灵活应用。为此数学作业批改要遵循以下原则。

(一) 全批全改和部分批改相结合

一般来说,对于新授课的作业,在课堂上,先及时抽批几本,发现问题当堂解决,过后采用全批全改的方法。这样可以了解每个学生对新知识的理解,掌握和运用情况,检查本堂课的教学效果,调整下堂课的教学内容。对普遍存在的问题,除了在全班进行讲解,还要在当天的家庭作业中适当布置相应的习题进行练习,加以巩固,个别问题也大都可以通过学生的书面修正得到解决。而练习课的作业主要是巩固知识,提高正确、熟练运用知识的能力,这类作业就可以采用部分批改的方法。具体可以这样做:1. 先抽一部分学生(其中好中差均有)的作业全面批改,大概了解学生这部分知识的运用情况,做到心中有数;2. 然后把事先准备好的答案(包括算式、计算过程和结果以及一题多解答案等)直接告诉大家批改,有普遍问题时,在告诉答案时就指出来。这样既省时、反馈及时,又能当堂解决问题。

(二) 自批自改和互批互改相结合

自我批改、互批互改可以是在教师指导下进行,也可以是学生的独立活动。习题难度不大,作业量又较大的情况下,由教师给出正确答案,学生自批或互批。如果时间比较充足,在自习课上,教师可以组织学生,进行完全独立地自我批改或同桌互批,关键是教师

应作为参与者在其中巡视检查，对作业质量差的当面指出，特别好的口头表扬，防止或减少不做家庭作业的现象发生。采用自我批改和交换批改的方法，学生不光要对自己的作业做出正确的评价，有时还要对他人的作业做出正确的评价。因此，学生在批改作业后就应该思考该给一个什么样的评价才是正确的、合理的。久而久之，也就掌握了怎样做作业才能得到较好的评价。从而使学生体会到自己才是学习的真正主人。

（三）轮流批改和讨论批改相结合

容易批改的家庭作业，如基础训练（口算、填表、填图等）可由四人小组的同学轮流负责批改，而综合性较强的或是计算过程较繁杂的作业，由组长负责讨论批改。

案例：

我们班的《基础训练》就是采用轮流批改和讨论批改相结合的方法。我在使用这些批改方法时，曾有惊喜的发现：有几个学习态度不很积极的同学，在轮到他当小老师批改其他同学作业的时候，不但按时完成了作业，而且完成得特别认真，甚至于那一天他们在数学课上的表现都特别积极。而大部分同学也都很看重自己当小老师的机会，经常跑到办公室询问下一次的作业什么时候改，轮到谁来负责批改或负责组织讨论，学生的参与意识很高，作业质量自然就提高了，更增加了他们的学习兴趣。

（四）家长批改、学生自评和教师评价相结合

一些长时间假期里的作业，如寒假作业、暑假作业等，是教师在繁忙的开学工作中遭遇的第一个难事。学生在漫长的假期里辛辛苦苦做下来，而教师是没法精心细致地批阅并评价每份作业的。鉴于此，我就索性要求我的学生在假期里把每天完成的作业交由家长批改。全部完成时，家长进行总评，再是学生自评，最后是教师总评

和寄语。寄语可以由家长写上对孩子的评价理由，由学生写自己作业完成过程中的感受，也可以是家长和学生写出对老师的建议和要求。

这样，作业就成为老师、学生、家长互相对话的渠道，学生的学习过程正常化地受到家长关注，同时也不再是被动地接受老师的评价，而是主动地进行自我评价。学生对这类常受冷遇的作业，也提高了意识，态度上升到一个新的档次。另一方面，避免作业评价方式刻板、僵化。

（五）坚持多维度的评价标准和多样化的评价方式

重视学生的情感，让批改多点人情味，激发学生的学习热情。

1. 符号指错和多维评价相结合。学生的作业是必然会出现错误和令人不满意的时候，这时，教师若情绪化地打下大号的“×”，甚至气急败坏地写下一道命令：“重做！”这样不仅于事无补，反倒会使学生对数学作业越来越害怕，从而对学习数学丧失兴趣和信心。实际上，学生的作业不仅反映他们知识、技能的掌握情况，整个解题过程中也体现其思维能力、情感态度、个性特点、数学价值观等。我们不能用简单粗暴的方式评价作业。首先，我们要考虑到学生的知识基础有差异，思维方式、思考能力又各有不同，所以学习上必然会有差距。“尺有所短，寸有所长”，我们不妨用“不同的尺子量不同的学生”。有了这样的理念，自然就能用平常心对待各种各样看起来很糟糕的作业。其次，对于错题，我们批改时除了打“×”，其实有很多好方法，比如，符号指错就是一个简单有效的方法，我们可以事先和学生预定一些符号，如理解错误用“?”，计算错误用“!”，方法太繁琐用“△”，答题不完整用“……”，题意未清下划“~~~~”等，这样不仅有利于指导更正，而且使学生体会到老师是非常关注他们的解题过程的，也非常在意他们各方面能力的表现。也许因为某个“闪光点”得到了老师的赞许，一个所谓的后进生的作业的质量从此突飞猛进呢。

下面以一题为例，列举的几个符号的运用。

	符号	意　　义	例　　题
1	√	完全正确无创意	$-44\times3=-132$
2	×	完全错误	-721 减去 21 的差乘 5，积是多少？ $-721-21\times5=-721-105=-826$
3	√×	部分错误	721 减去 21 的差乘 -5，积是多少？ $(721-21)\times(-5)$ $=700\times(-5)$ $=-350$
4	?	运算不合理（这一符号常与“×”一起使用，明确指出错误原因）	$-5+5\times5+5$ $=0\times10$ $=0$

2. 量化的“等级”与质化的“评语”相结合

苏霍姆林斯基说过：“不要让评分成为人精神生活唯一的吞没一切的领域，如果一个人是在分数上表现自己，那么就可以毫不夸张地说，他等于根本没有表现自己，而我们的教育者在人的这种片面表现的情况下，就根本算不上是教育者。我们只看一片花瓣，而没有看到整个花朵。”所以，评价学生的作业仅用分数是不完整也是不科学的。我们不妨打破数学作业批改的常规，以等级代替分数，再同语文老师批改作业那样辅助评语，即采用“等级＋评语”的作业批改评价模式。要使“等级＋评语”的评价方式发挥实效性，前提是对学生有充分的了解，不但了解学生的学习基础，还要了解学生的性格特点，以便“对症下药”。

案例：

例如，对于爱好数学的优秀学生，我们可以使用这样的语言：“你的认真让老师感动！”“批改你的作业，是一种享受！”“你一直很优秀，老师希望你永远是×班的骄傲”等。

对于认真做作业而成绩并不突出的学生，我们可以写上：“你的点滴进步，老师都看在眼里。”“老师相信你，继续努力。”“老师喜欢

你，有什么不懂多问老师好吗？”等等。

对于作业质量时好时差的调皮生，我们用些商榷性的评语：“你看能不能发现错在哪儿？”“你很聪明，如果克服马虎的习惯就好了，对吗？”“可以书写得工整些吗？”等等；再有，作业过程中精彩的地方可简短地写上“方法太好了，可要细心呀”“解得巧，真聪明”、“Very good!”“best”等；做错时可写上启发引导的话语“想清意思，再解题好吗？”“你看还有更好的解法吗？”等。

总之，我们应在作业本上写上简单的评语，这不费太多时间，却可以传递一份浓厚的师爱，使学生获得知识的同时，体验着理解、信任、友爱、尊重和鼓励，从而把完成数学作业当做与教师交流的机会，这样何乐而不为。

教学改革是一条漫长的路，而作业批改的改革在这条路上还刚刚起步，表面看似琐碎而平凡的作业批改工作中，蕴藏着丰富多彩的内容和深刻的哲理。我们有责任在这一教学活动中不断地调整自己，完善这项工作，以更好地造福于学生。

第四节　数学作业的管理

作业管理的目的在于设法提高作业的效能，最终为提高教学质量、关注学生成长、激励和调动学生学习积极性服务。作业管理的基本任务是：科学记录学生作业的客观情况，组织和实施对作业的评价，发挥作业的应有功能。作业管理的主要实施者是教师，管理的对象是学生的作业以及做作业的学生。作业管理是作业批改的重要一环，只有作业管理到位，才能使批改的作用落实到学生身上，起到做作业的作用。

数学作业的管理包括学校、教师、学生三个层面的管理，只有三个层面的管理均实现最大化，教学质量才能最优化。

一、学校层面的数学作业管理

许多学校没有作业管理传统，行使作业权力的只有老师，作业管理只达到任课教师或教研组长这一层面，因此，首先应该将作业纳入学校层面的管理。学校层面的数学作业的管理包括以下几个方面：

（一）管理规划

作业整体管理的规划包括：确定管理目标，选择管理方法，安排相关人员，确定职责分工，拟定相关规章制度等。在具体措施上，作业整体管理的目标应当以一学期为最短期限；在管理方法的选择上，应借鉴自上而下的决策方式，采取民主式管理；在人员安排上，缺乏作业管理传统的学校最好由校领导挂帅，既要教师们广泛参与又要相关教师专职负责；在规章制度上，初期只拟定作业管理的基本规范，在实行管理的阶段成果上再将一些具体的管理行为制度化。总之，整体规划要基于对作业管理现状的思考，要立足学校实际。

（二）教师培训

日本著名教育家佐藤学教授在其《静悄悄的革命》一书中提到，“教育实践是一种文化，而文化变革越是缓慢，才越能得到确实的成果。”作业管理行为的改变也是要经过一个缓慢的过程才行，因为传统的作业管理行为强调标准答案、教师权威。作业过量、不注重作业设计等行为的背后是把学生假设成一个容器，一个有待改善的无知者。这种作业文化已经渗透到许多教师的行为中，而传统的作业管理行为又强化了这种文化。因此，学校从整体上进行作业管理的工作要点之一是转变教师的意识。意识的转变才能带来直接作用于学生的各个作业环节的改善和学校层面的作业管理行为的提高。为此，对教师的培训工作很重要，可以组织新课程理念的学习和培训，将新课程理念引向作业管理领域并鼓励教师讨论，利用教师观念的差异，改变落后的作业意识；让教师交流彼此的作业管理实践，

改变部分教师落后的作业管理行为；鼓励教师进行作业设计和作业设计的合作；鼓励教师进行作业管理行为的创新等等。

在作业整体管理中，对教师进行培训的形式可以多种多样，比如，请课程专家开讲座，请教研员或有经验的教师来指导作业设计，或者各科教师在一起开“作业沙龙”，开展作业设计竞赛或者以作业设计为主题的教育科研等等。

（三）制度完善

在作业管理推行一定时间后（至少是半个学期），相关的作业管理规范有的会得到教师认同，有的会得到教师的反对，在新课程理念指导下，还会有作业管理行为的自我创新。在这个基础上，学校管理小组可以修改原先的规范，将一些经过实践检验的作业规范以建章立制的方式固定下来，而一些限制教师、学生主动性的作业管理措施则不再要求。制度完善不仅表现在作业质量评价体系的完善上，学校内作业管理不同主体的职责、工作方式、时间安排以及作业管理的保障机制、奖惩机制等也应该建章立制加以完善。总之，制度的完善是巩固作业管理成果的关键，但是制度并不是一成不变的，应该在保持稳定性的基础上根据实际情况进行调整，使每个作业管理主体的行为都有依据可循。

（四）管理检查

在作业整体管理中，学校的主要任务就是包括日常管理和阶段性评价两方面。

日常管理指学校根据已经确立的作业管理规范检查教师的作业行为是否符合作业管理的基本原则。主要内容包括：作业是否符合课程目标和教学进度；作业题目是否经过设计，题型是否多样；作业批改是否及时、准确、认真；教师的批语、批改方式是否体现了以学生发展为中心；教师有没有做好学生作业情况的相关记录。学校在进行日常管理中要注意和学生之间的沟通，切实考虑学生对作业量、作业设计和作业评价的看法。日常管理检查的周期不能过短也

不能过长，每周检查一次比较适宜。日常管理应该结合教师自查、教导处主任检查、学校领导抽查等灵活的方式。

阶段性评价指在日常管理的基础上，每学期集中两次或三次对作业进行全面的检查。具体的任务是总结教师在管理学生作业中的不足和优点，及时纠正错误的做法，及时把其他教师的好经验提供给其他教师分享。在具体时间安排上，应避开期中、期末前的复习期；在具体做法上，包括作业管理小组通报检查结果、组织教师剖析和讨论典型的作业管理个案、布置下一步的作业管理要求和任务。

二、教师层面的数学作业管理

在日常的教学活动中，许多教师都忽略了这一环节，认为没有必要写作业批改记录，他们常常在作业本上草率地给个分数、等第，标个日期，这样做的教师根本没有认识到作业批改记录有着其他教学程序无法代替的作用。

（一）数学作业批改记录管理

作业批改记录，就是教师在批改学生作业时把学生作业中信息（包括学生交作业的时间、作业完成情况、作业的效果、作业的思路、作业中存在的问题、有创意的解法等）进行一个简单的登记、分析、归纳、小结和研究。

从某种意义上讲，教师的课堂教学过程实际上是教师教学和育人智慧的生成过程。但是，在课堂短短的几十分钟时间内，教师很难完成这样一个充满智慧而又复杂的过程。为此教师的课堂教学行为需要向外延伸，其中给学生布置课后作业就是一种有效的方式。通过作业的批改和审阅，教师可以继续对学生实施教学指导，作业批改记录就是最便捷而又最有效的途径。通过作业批改记录，教师可以实现与学生跨越时空的对话，可以通过作业本，通过笔和纸模拟出一个新的教学空间，完成教师课堂教学智慧的继续生成。

作业批改记录不仅仅记载学生作业中存在的问题，更重要的是对这些问题作出科学的分析，并在分析的基础上找到相应的措施。它是教师下次备课的有效凭据，也是改进教学教法的指南针。

附：

作业批改记录样表（教师可以根据情况自己设计）

姓名________班级________学号________

作业日期	交作业是否准时	书写、格式是否规范	作业中的典型错误	作业中优秀解法	整体作业的质量	给学生的学习建议
9月1日						
9月2日						
9月3日						
…						

案例：

浅谈数学作业批改记录的意义①

我觉得数学作业批改记录，除了能督促学生按时完成作业外，还能对学生起到以下几方面作用：

（一）督促学生养成认真书写的习惯。每个学期初在做第一次作业前，教师都要强调作业格式、书写要求。对于第一次作业做得比较好的同学，我会表扬，并发下去让全班学生传阅一遍；对于做得太差的同学，我会重申一遍书写格式要求，并让他们重做一遍，及时

① 胡小梅. 广东省罗定市罗城镇中心小学，http://www.ldlcxx.com/gaikuang/gaikuang.html

纠正不认真书写的态度。

（二）督促学生认真听课。我在授完五年级上册第 4 页例 3 小数乘小数时，设计了以下几道竖式题为作业：1.8×23、0.37×0.4、0.09×2.4、1.06×2.5、0.6×0.39、3.8×1.08，这几题，既要注意积的位数不够用 0 补足，又要兼顾乘数中间有 0 等，学生计算不小心，或方法未掌握，都可能计算错误。我先记录全对的同学，给予表扬，既表扬他们的细心，又表扬他们上课认真。得到表扬的同学受到激励，下次计算更细心，上课更认真；没有受表扬的同学，也会产生"下次我也要争取满分"的决心。当我评讲一题就指明哪些同学做错了，这些同学也听得特别认真，觉得这个老师作业批改得太认真了，连做错都记得，再也不能不认真听课了。

（三）可以因材施教，对症下药。作业批改时，记录哪个同学哪个知识点不过关，可以设计同样类型的题目，再让他们多练一遍；在练习课中碰到类似题目刻意让那些不会做的同学回答，再让他们"错"一次，他们就会吃一堑、长一智，印象特别深刻，这样与只叫那些会的同学出来做相比，效果截然不同。我在上完五年级上册第 22 页例 6 一个数除以小数时，设计了以下作业，列竖式计算：①91.2÷3.8、②0.756÷0.18、③51.3÷0.27、④5÷25、⑤6.21÷0.03、⑥210÷1.4。这几道题，既有位数相同，也有位数不够的情况，学生较容易错。我先记录对的同学，然后记录错得较多的同学，课堂上评讲时让他们上黑板再做一遍，并让其他学生指出其错误。特别对于 5÷25 与 210÷1.4 这两题，"5"为什么先加小数点再添 0？"210"为什么直接添 0？先让学生小组讨论，共同探究原因，然后对症下药，再出同类型题目让他们再做一遍，可以以"优"带"次"进行"一带一"活动，让学生教会学生，达到共同进步的目的。

（四）可以节省时间，提高课堂教学效率。有时候，全班同学答对率高，只有极个别学生做错，这样教师可以利用课后时间，单独找几个同学评讲，不用面对全班同学评讲，浪费课堂时间。如在用简便方法计算中，有的同学将 1.25×8.8，错做为 1.25×8.8＝1.25×

$(8\times0.8)=(1.25\times8)\times(1.25\times0.8)$ 或 $=1.25\times(8\times0.8)=(1.25\times8)\times(1.25\times1.1)$，这两种情况都是因为对乘法分配律概念与乘法结合律概念混淆所致。我指出其错误，并更正，再出一道 2.5×4.4，看看学生是否会触类旁通。

（五）对知识查漏补缺。我注重综合作业批改记录，因为综合作业是检验全班同学对几个知识点的运用。我精心设计每一次综合作业，尽量设计多种类型，如下：一是概念（在填空、判断和选择题中体现），二是计算方面，三是解决问题。

在教完第五单元有关图形计算，我设计了以下作业：

一、填空：① 2700 平方米＝（　　　）公顷，4.08 公顷＝（　　　）平方米。

② 用两个（　　　）梯形可以拼成平行四边形。

③ 一个直角三角形三条边分别是 3 cm、4 cm、5 cm，这个三角形面积是（　　　）。

④ 一个平行四边形的面积是 6.08 dm^2，与它等底等高三角形面积是（　　　）。

二、填表：

图　形	底	高	面积
平行四边形	6.3 cm	2.8 cm	
平行四边形	2.5 cm		20 cm^2
三角形	7.8 dm	4.5 dm	
三角形		3.2 dm	10.24 m^2
梯形	上：3 m 下：5 m	2.4 m	

三、解决问题

题目：一块三角形玻璃，量得它的底是 12.5 分米，高是 5 分米，这块玻璃面积是多少？如果每平方分米价钱 1.2 元，求这块玻璃要

多少元?

学生在综合作业中更容易暴露出知识弱点和错误,对于全班同学错得较多的地方,如填表中求三角形的高,很多同学忘记×2,我会详细评讲,着重解释为什么"×2";对于对得较多的地方,评讲时就像蜻蜓点水,一带而过。这样评讲,重点突出,学生印象深刻。

作业批改记录就像一份检验单,有了它,我们可以因材施教,对症下药,它是我们上课辅导的好帮手。不过虽然作业批改记录在查漏补缺方面起举足轻重作用,但我们更应该把重心放在钻研教材、精心备好每一节课上面。既要"备"教材,又要"备"学生,把每一节课学生可能遇到的困难也备一备。课堂是千变万化的,对学生在课堂作业中出现的问题,能够解决的尽量在课堂上解决,提高课堂效率,这样学生对知识掌握得好,作业中的错误自然少一点;作业错误少了,作业批改记录也少了,我们就能从批改作业记录中解放出来。记录的最终目的就是为了"零"记录了,这就是作业批改记录的最终意义。

(二)数学作业评价管理

新课改要求:对数学学习的评价要关注学生学习的结果,更要关注他们的学习过程;要关注学生数学学习的水平,更要关注他们在数学活动中所表现出来的情感和态度。由此可见,新评价体系关注的不仅仅是学生的学业成绩,更注重学生在学习过程中的情感体验、态度形成、能力发展和习惯的养成。教师要加强对学生作业情况的记录和考查,对认真按时完成作业的学生给予表扬鼓励计入适当的平时成绩,对作业质量高的学生加分奖励,采取各种办法促进和鼓励学生正确对待数学作业的完成以利于推进数学教改的进程。

数学作业过程管理计划中,教师要把评价措施制定得详细、全面,例如在每学期开学初提出明确的作业要求,使学生在作业过程中"有章可循";评价要重在平时,对学生的各项作业要评得及时、评得科学、评出优点和不足,对作业表现好的同学适当进行作业展评。

开展作业过程评价要做好汇总评价，这样才能收到事半功倍的效果。

（三）数学作业订正管理

在平时工作中我们许多老师可能都有这样的体会，有时一道题在平时练习时做过了，错误的同学也进行了订正，但到考试时，这些学生仍有错误。分析其中的原因有多种，其中一个重要的原因就是平时学生作业订正效果不佳，有些学生可能是在老师讲评时，并没有真正听懂，又碍于脸面，不愿去问老师和同学，就只记住了题目的答案，因此订正时题目做得既快又对，但一到考试就又不会了。所以我们老师不能被这些表面现象所迷惑，在改进自身教学的同时，重视学生作业的订正，体现出作业订正的有效性。

作业的订正方法：首先让学生知道做错的地方，这样做的目的就是要让学生自己找到错误的问题所在，只有找到问题才会对问题有重要的认识，只有自己明白错在哪里才有办法对问题进行整改。其次让学生找出做错的直接原因，让学生写写自己这道题目为什么做错了，要求学生清楚如何弥补。把做错的题目记在本子上，按遗忘规律来确定复习时间，隔一段时间复习一下，实践证明这一方法对提高教学质量非常有效。

作业的订正要因人而异：对于学困生的问题教师应随时随地地加以指正，让他们觉得教师时刻关心着他们的学习；对于中等成绩的学生如果是因为粗心出错而引起的一些小毛病可以让学生自己检查订正，如果是学生不会做的题，但经过一点提示之后可以做出，就可以用学生互助的方法进行订正，通过向别的同学进行请教，不仅可以让那些胆小而不敢向老师求助的学生获得帮助，而且还能培养同学之间团结友爱的精神和减轻老师的工作负担；对于成绩优秀的学生，他们的错误大多是因为粗心引起的，教师就可以放开手脚让他们自己去发现错误并订正，如果遇到实在太难的题，在他们订正错误时教师可以进行适当的点拨，然后再让他们自己去思考，独自订正好作业。

三、学生层面的数学作业管理

学生做作业的习惯、订正作业的规范，都是学生作业管理的重要环节。例如，订正作业的目的是让学生对知识进行查漏补缺，发现并改正自己对知识的掌握过程中出现的问题。只有当学生自己完全地、真正地掌握了这些知识，才算完成了订正作业所要达到的目的。

1. 做数学作业的习惯管理

学生应自觉养成良好的数学学习习惯，包括先复习再做作业、规范书写、认真对待错题、认真订正、及时巩固等良好的学习习惯，以及保存好数学作业、整理好练习卷的习惯。

2. 作业中错题管理

每位学生应有一本错题本，先让学生把错题抄写下来，然后订正好，并分析一下错误的原因，写下改进的方法。建立作业错题管理的时间长了，学生的积累也就多了，不仅是起到了集错的功效，还能让学生发现自己的不足，及时改进学习方法。

3. 作业中错题的订正管理

学生订正作业是在完成一项有针对性的训练，所以订正的题目一定要能够举一反三，这样才能取得最佳的订正效果。在让学生订正作业时，可经常对错题进行再次处理，比如在原来错题的基础上做一些变动，再让学生做一做、算一算，进行巩固。有时还采用"放一放"、"冷一冷"的方法，也就是在学生作业订正三四天后，再让学生做一下原题，因为从遗忘曲线规律可以知道，这时学生头脑中记住的答案已经忘记了，但真正理解了题目的学生对正确的解题方法是不会忘记的。经过"冷却处理"并再次订正后，老师就会知道哪些同学没有真正弄懂，需要再次讲解了。

作业订正是学生学习效果反馈的重要途径，它完成的好坏直接关系到学生对知识的掌握情况，而且对强化教学效果，进一步提高教学质量和促进教学改革具有重要意义。所以在平时的教学工作

中应更多地关注学生作业订正，把每一次学生的作业订正都看作一次对自己教学的检验和反思的机会，根据实际情况调整自己的教学行为，更好地体现作业订正的有效性，这样才能取得事半功倍的教学效果。

案例：

"向试卷中的错误学习"——高三数学复习的一种有效方式

众所周知，高三数学练习测试几乎每月一次，若利用好这些测试机会可以发现自己数学学习中的很多不足，查漏补缺，可以迅速提高数学成绩，达到事半功倍的效果。

步骤一：分析试卷，将存在的问题分类。

每次考试结束试卷发下来，要认真分析得失，总结经验教训，特别是将试卷中出现的错误进行分类，可如下分类：

第一类问题——"遗憾之错"。就是分明会做，却做错了的题，比如说，"审题之错"是由于审题出现失误，看错数字等造成的；"计算之错"是由于计算出现差错造成的；"抄写之错"是在草稿纸上做对了，往试卷上一抄就写错了、漏掉了；"表达之错"是自己答案正确，但与题目要求的表达范式不一致，如角的单位混用等。出现这类问题是考试后最后悔的事情。

第二类问题——"似非之错"。记忆得不准确，理解得不够透彻，应用得不够自如；回答不严密、不完整；第一遍做对了，一改反而改错了，或第一遍做错了，后来又改对了；一道题做到一半做不下去了等等。

第三类问题——"无为之错"。由于不会，因而答错了或猜的，或者根本没有答。这是没有思路、不理解，更谈不上应用的问题。

步骤二：制定策略，将问题各个击破。

建议策略是：分步打好三个战役，即："消除遗憾"、"弄懂似非"、"力争有为"。

我们的复习一般采用三轮复习法，我建议第一轮重点放在前“两个战役”，当然对第一轮复习中遇到的不会的题目也要搞懂会做，但可以不另外去做难题。第二轮重点在第三个战役“力争有为”，做一些综合题，提高能力。

第一战役：消除遗憾

要消除遗憾必须弄清遗憾的原因，然后找出解决问题的办法。

“审题之错”，是否出在“急于求成”？可采取“一慢一快”的战术，即审题要慢、答题要快。

“计算错误”，是否由于草稿纸上写得太乱，计算器用得不熟等。建议将演草稿纸对折分块，每一块上演算一道题，有序排列便于回头查找。练习计算器的使用技巧，提高使用的准确率。

“抄写之错”，可以用检查程序予以解决。

“表达之错”，注意表达的规范性，平时作业就要严格按照规范书写表达，并学习高考评分标准写出必要的步骤，并严格按照题目要求规范回答问题。

本战役应该在平时作业中予以充分重视，把每次作业当作考试来对待。在23天（研究成果表明一个人习惯的养成主要在前23天）左右的时间内完成这一战役，并在其他战役中不断巩固成果。

第二战役：弄懂似非

“似是而非”是自己记忆不牢、理解不深、思路不清、运用不活的内容。这表明你的数学基础不牢固，一定要突出重点，夯实基础。你要建立各部分内容的知识网络；全面、准确地把握概念，在理解的基础上加强记忆；加强对易错、易混知识的梳理；要多角度、多方位地去理解问题的实质；体会数学思想和解题的方法。当然数学的学习要有一定题量的积累，才能达到举一反三、运用自如的水平。

第三战役：力争有为

在高三第一轮的复习中，不要做太难的题和综合性很强的题目，因为综合题大多是由几道基础题组成的，只有夯实了基础，做熟

了基本题目，掌握了基本思想和方法，综合题才可以迎刃而解。在高三复习时间较紧的情况下，第一阶段要有所为，有所不为，但平时考试和老师留的经过筛选的题目要会做，做好。同时也要根据学生实力，如果特别优秀的学生也可以“大有作为”。

步骤三：巩固成果，不断调整目标。

每次测试都要确立自己本次改错的目标，考后要检查目标的实现情况。随着自己的不断进步问题会越来越少，成绩越来越好，离你的理想也越来越近。

如果学校、教师、学生三个层面都对作业的管理工作引起重视并有效加以落实，那么学生良好的数学学习习惯就会养成，学习兴趣会提高，数学成绩会有长足进步，教育目标也会顺利达成。

本章小结

数学作业的布置、批改、管理是教学的重要环节。数学作业的布置要适时、适量、得法；数学作业的批改要讲效率、求效果，使作业成为新型师生关系的纽带，师生心灵沟通的平台；作业管理应成为学生养成良好数学学习习惯、提高学习兴趣的助推器，教会学生向错误学习，提高学生数学学习能力，使教学行为本身成为有意义、有价值的行为，成为富有创造性的劳动，它能折射出教师的教学实践从幼稚走向成熟、教学理论认知从肤浅走向深刻的光彩，记录师生的整个成长历程。

问题讨论

1. 平时在教学中你是如何布置作业的？你对本章中布置数学

作业的基本要求有何看法和建议？

2. 你平时采用何种方法批改学生的数学作业？请设计一份有自己特色的作业批改记录表。

3. 关于作业的管理你有何想法？请设计一种数学作业订正的方法。

第四章 数学作业的讲评

第一节　数学作业讲评的基本原则

一、数学作业讲评的意义

数学作业讲评是课堂教学的有机组成部分，是师生交流的平台。数学作业讲评是教师通过学生课内作业的观察、交流，学生课外作业的批改中所获取的反馈信息，在分析研究的基础上，对学生存在的知识或能力缺陷进行的矫正性教学活动。

数学作业讲评，对教师来讲，是教学基本环节中不可或缺的重要一环。这一重要环节既是对教师自己教学效果的检验、反馈，又是对学生的基础知识巩固，使知识转化为技能，培养学生思维品质的重要途径。

数学作业讲评，对学生来讲，也是数学学习过程中不可或缺的重要一环。数学学习逻辑严密性非常强，而且班级授课制下必然导致班级中一部分学生在学习新课后对知识并未能理解，或是学生对部分知识点掌握不佳，长久下去，疑惑的知识点越积越多，学习变得举步维艰，渐渐对数学学习失去兴趣与信心。通过作业讲评将学生混淆、理解欠缺的知识点加以梳理巩固，将学生没有理解的方法和思想加以点拨，从而更轻松愉快地学习，提高学生学好数学的信心。

通过数学作业讲评，交流学生的学习成果，把学生作业中出现的想法、创见、存在的错误作为教学的资源，为矫正学生自己的学习缺陷服务，巩固、充实、完善和强化数学知识技能，促使知识再整理、再综合、再运用；学生通过自查错误，能培养自主学习能力，促进主体的自我发展；学生在辨析纠错的过程中，能以数学概念定理为依据，修补认知上的缺陷，形成正确的认知；通过讲评活动，提炼学生的思想方法及个性想法，使学生对所学知识融会贯通，培养学生的数学思维能力。

作业讲评是在教师统计、分析学生学习情况，批改学生作业等工作完成后进行的一项重要工作，是我们的日常教学中几乎每天都在进行的，对学生进行再教育的一种活动。因此重视作业讲评，研究作业讲评，做好作业讲评，对于增强学生学习的兴趣、巩固知识与技能、提高学习成绩、拓展学生思维有着不可替代的作用；对改善学生的认知结构，交流学生的学习成果，培养和发展学生的能力等方面也有很大的促进作用。

二、数学作业讲评的基本原则

作为课堂教学有机组成部分的数学作业讲评，有效性是全体数学教师的共同追求。考察大量的数学作业讲评案例，我们认为应遵循以下基本原则。

（一）目的性原则

教师在作业讲评之前必须进行充分的准备，及时观察学生课堂作业和批改课后作业，并进行分析，对学生已经掌握的内容和方法作出肯定的评价；对所反映出来的学生学习与教师教学上的问题作出改进。把握好教材的重点和学习的难点，梳理好学习数学的思路。根据作业中有难度、学生错误严重的题目，或是学生作业中存在的一些共性问题确定讲评所要达到的目标。可将一次或几次作业根据目标进行梳理，哪几个习题着重解决哪一知识点的问题，对这一知识点的落实需要哪几个层次习题梯度来达成。把握学生受

个体主体的差异、外界客观原因等影响，在易错易混概念、基本的重要方法技巧等方面，形成较强的对比性，进行总结，形成系列。明确讲什么，怎样讲才能起到更好的效果。一般地，数学作业讲评课要达到以下目标：纠正学生答题中的各种错误，掌握正确解法；引导学生学会学习；对知识、方法作进一步的归纳，站在数学思想的高度认识所学内容。

案例 1：

学习了两位数的退位减法后，学生作业情况统计约 20% 的学生 20 以内加减法基础薄弱，导致结果出错；30% 左右的学生对于两位数退位减法的算理不能理解。因此在作业讲评课前制定的目标是：1. 通过图、操作深刻理解 20 以内退位减法的算理；2. 利用演示、学生介绍计算方法、20 以内退位减法的迁移学习，进一步理解两位数退位减法的算理，并能正确计算。因此在练习 1 笔算退位减之前，可安排 2 个专项练习，第一个专项练习：用小棒图帮助理解练习中的算理，以此理解 20 以内退位减法的算理，然后进行专项 20 以内减法的口算练习目的在于达成目标 1。第二个专项练习：利用演示、学生介绍计算方法、20 以内退位减法的迁移学习，进一步理解两位数退位减法的算理。目的在于达成目标 2。

案例 2：

作业题目：二次函数 $y=2(x^2-3)+1$ 图象的顶点坐标是______。

作业中有许多学生的错误答案是(3，1)。

讲评实录：

师：答案(3，1)错在哪里？

生：这个二次函数给出的不是顶点式。

师：二次函数的顶点式应是？

生：$y=a(x-m)^2+h$。

师：它的图象的顶点坐标是？

生：(m, h)。

师：这个题目正确的做法是？

生：先去括号，化为 $y = 2x^2 - 5$，所以它的图象的顶点坐标是 $(0, -5)$。

师：二次函数 $y = 2x^2 - 5$ 是不是顶点式？

生：是。

师：求二次函数图象顶点的一般方法先将给出的二次函数解析式化为一般式 $y = ax^2 + bx + c$；再用配方法化为顶点式；而在这一题目的一般式 $y = 2x^2 - 5$ 中少了一次项，可看作 $m = 0$ 的顶点式，不用再配方。

讲评的目的是使学生正确认识二次函数顶点式的本质特征，不要被括号的假象所迷惑。巩固求二次函数图象顶点的方法。

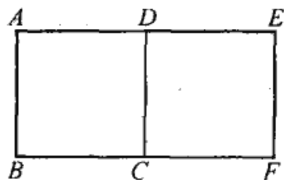
（二）正确性原则

教师在作业讲评之前必须对作业的内容、解题方法等进行认真的研究，在讲评过程中要倾听学生的想法，对学生的错误或合理、创新的想法作出正确的判断，对学生提出的问题作出正确的回答或解释，确保讲评的内容与方法的正确性，把握好数学问题的内在规律，避免由于教师的讲评错误，造成学生概念理解及思维过程方法的错误。

案例：

上海市有一年的中考试卷中有这样一道试题：

如图，如果四边形 $CDEF$ 旋转后能与正方形 $ABCD$ 重合，那么图形所在的平面上可以作为旋转中心的点共有________个。

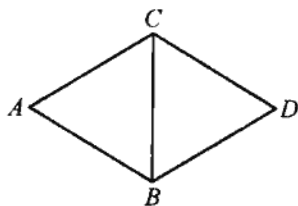


在教学质量分析中，我们发现有两个平

均成绩较高的班级的学生，几乎都错误地把这个题的答案答成了2个。

经调查，原因是在《上海市初中数学教学基本要求与训练》中有类同的训练题：

如图，如果三角形 BCD 旋转后能与正三角形 ABC 重合，那么图形所在的平面上可以作为旋转中心的点共有________个（课本没有给出答案）。



由于任课老师没有正确理解题意，在作业讲评时，只讲了点 B、C，当学生提出还有 BC 的中点时，教师未做思索与分析，曲解题意，还强调只能在 A、B、C、D 四个点中的点。造成班中绝大部分学生中考答题的错误，有些成绩好的学生虽然感觉有问题，但记得老师讲过是2个，而不敢填3个。

正确讲评作业是最基本的一条原则。

（三）针对性原则

作业讲评应针对学生在练习、作业中存在的普遍问题和典型问题，找出错误的主要原因，结合知识的重难点问题，克服盲目性，最大限度提高课堂教学效率。一般错误率在20%至60%之间的作业题应重点讲评，突出教学基本要求的落实，突出共性的问题。对于错误率在60%以上的作业题要因题而异进行讲评，分析作业的要求，如果是属于教学基本要求的问题，必须寻找教学中的问题，在讲评中改进；如果作业题本身是有能力要求或难度较高的，那么讲评应侧重于思路的分析，不必对所有的学生作详细的讲评，对接受能力强的学生，要抓住问题的关键点，指点迷津引向深入。对于错误率在20%以下的作业题要因人而异，按不同类别分别给予辅导。对基础差、错误多的学生可个别讲评，摸清症结所在，帮他们理清思路，弄懂概念，从而掌握正确的方法。

案例:

作业题目:有若干辆列车在一条地铁线路上运行,每辆列车来回运行一圈需要 80 分钟(即同一列车开出同一站台所隔的时间),设前后相邻的两辆列车开出同一站台所相隔的时间(称为行车间隔时间)相等。

(1) 如果线路上有 a 辆列车运行,行车间隔为 b 分钟,那么 a 与 b 之间满足怎样的等量关系?

(2) 如果比原来增加 4 辆列车,行车间隔时间可减少 1 分钟,问原来的行车间隔时间是几分钟?

作业中学生错误率为 50%,主要的问题是由于一些学生缺少生活实践的经验,不会将实际问题转化为数学问题,对这一问题中的"行车间隔时间"不理解,不会分析数量关系及寻找等量关系;教师在教学时往往只注重如"行程问题"、"工程问题"、"价格问题"等模式化的套用,而缺少一般的解题思路、方法的分析。

讲评实录:

师:在这一问题中"行车间隔时间"表示什么意思?与哪些量有关?

生:"行车间隔时间"就是等车的最长时间,它与车辆数有关。

师:很好。本题涉及列车来回运行一圈所需的时间、列车辆数及行车间隔时间三者的关系,与列车运行的速度与路程无关。可从具体的列车数量入手:

如果只有一辆列车,那么行车间隔为几分钟?(生:80 分钟)

如有两辆列车,那么行车间隔为几分钟?(生:40 分钟)

如有 3 辆列车,那么行车间隔为几分钟?(生:$\frac{80}{3}$分钟)

那么 a 辆列车运行的行车间隔为几分钟?(生:$\frac{80}{a}$分钟)

这样就有 $b=\frac{80}{a}$。

在解决问题的过程中,我们可以把字母看作是具体的数字,这

是字母表示数的思想方法。

师：第二个问题如何来解？

生：可设原来的行车间隔时间是 x 分钟，利用第(1)小题得到的等量关系可得列车辆数 $=\dfrac{\text{列车来回运行一周所需时间}}{\text{行车间隔时间}}$，据题意就可列出分式方程 $\dfrac{80}{x-1}-\dfrac{80}{x}=4$，求得原来的行车间隔时间是 5 分钟。

师：由于无法直接求出结果，经常可通过设未知数，建立方程的方法解决问题。设行车间隔时间为 x 分钟，可分别表示列车增加后与增加前列车车辆数，利用车辆数之间的等量列方程，从而使问题得以解决。本题还可采用设间接未知数的方法，如设原来有 x 辆列车，请同学们试一下。

教师以学生身边发生的问题体现数学与人类生活的密切联系，并运用所学知识解决实际问题，通过讲评引导学生关注生活、关注社会，从数学的角度去思考、发现和提出问题，培养积极进行探索和研究的态度和独立思考的习惯。针对学生缺少生活实践的经验，将实际问题转化为数学问题薄弱的问题，对这一问题中的"行车间隔时间"不理解，不会分析数量关系及寻找等量关系的情况，在第(1)小题讲评中，为解决问题设置了思维的起点，降低了难度，为基础较差的学生正确理解题意提供帮助，有利于提高学生的阅读理解能力，体会字母表示数的数学思想，将具体的数字抽象成字母，用数学表达式表示有关量的关系；第(2)小题主要体会方程思想。

(四) 典型性原则

数学教学的根本任务在于发展学生的认知结构，提高学生的素养。而数学认知结构是由数学知识结构转化而来的，因此，讲评过程要使学生形成系统的知识结构，使学生在头脑中形成一个经纬交织、融会贯通的知识网络，这样有助于所学知识的深刻理解和保持。

为此，讲评应将分散于各题中典型的知识点和数学思想方法适当归类评价，形成认知和方法的系统结构。特别是通过典型习题，突出思路形成的过程，突出思路的探索过程，经历失败到成功的过程中，暴露学生的自然思维过程，逐步形成解题的思考模式。而要把作业题逐一分析，从时间上来说不允许，从学生实际来说也没有必要。因此，课堂上讲评、分析的题目必须有所选择。选题应遵循典型性原则，即要选择与讲评目的有直接关系的基础知识、基本技能和教学方法作业题，也要选择学生答题时有独到见解的题，选择出错较多的题等等，来进行讲评。切忌面面俱到，逐题讲评。

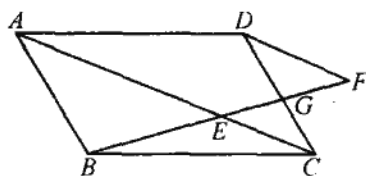
案例：

（几何证明复习课作业）题目：

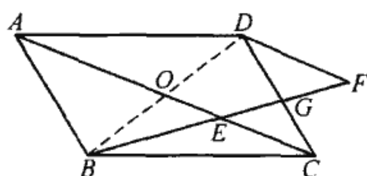
已知：如图1，点 E 为 $\square ABCD$ 对角线 AC 上的一点，点 F 在 BE 的延长线上，且 $EF = BE$，EF 与 CD 相交于点 G。

求证：$DF \parallel AC$。（请用两种方法证明，可以添辅助线，可以不添辅助线，如果两种方法都添辅助线，要求是不同位置的线。）

作业中学生典型的证明方法有：



（图1）

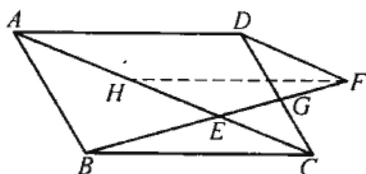


（图2）

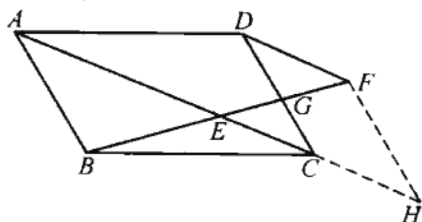
(1) 连结 BD 交 AC 于点 O（如图2），$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore BO = DO$。$\because BE = EF$，$\therefore OE \parallel DF$，即 $DF \parallel AC$。

(2) 过点 F 作 $FH \parallel BC$，交 AC 于点 H（如图3），则 $\dfrac{FH}{BC} = \dfrac{EF}{BE}$。$\because BE = EF$，$\therefore FH = BC$。$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD \underline{\underline{\parallel}} BC$，$\therefore FH \underline{\underline{\parallel}} AD$，$\therefore$ 四边形 $AHFD$ 是平行四边形。

$\therefore DF \parallel AC$。



（图 3）



（图 4）

(3) 过点 F 作 $FH \parallel AB$，交 AC 的延长线于点 H（如图 4），得到 $\triangle HEF \cong \triangle AEB$，由 $HF \underline{\parallel} AB \underline{\parallel} CD$，得四边形 $HCDF$ 是平行四边形，从而得到 $DF \parallel AC$。

(4) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AB \parallel CD$，$\therefore \frac{CG}{AB} = \frac{EG}{BE}$，$\because AB = CD$，$BE = EF$，$\therefore \frac{CG}{CD} = \frac{EG}{EF}$。$\therefore DF \parallel CE$，即 $DF \parallel AC$。

主要的问题是许多同学只得到了一种证明的方法，不会从不同的角度出发思考问题，有一部分同学由于对证明两直线平行的方法不熟悉，不会分析，无从入手。

讲评时教师在指出一些典型的问题后，选择几个典型的解法，请几位同学用实物投影打出自己的证明过程，再讲一下证明时的思考方法：

生 1：由▱$ABCD$ 的对角线互相平分，想到连结 BD，由 OE 是 $\triangle BDF$ 的中位线，就可得到 $OE \parallel DF$。

师：由"AC 是▱$ABCD$ 的对角线"这一条件出发考虑，利用中位线定理证明两直线平行。

生 2：过点 F 作 $FH \parallel BC$，交 AC 于点 H，只要证明四边形 $ADFH$ 是平行四边形，利用 $\triangle FHE \cong \triangle BCE$ 或比例线段都能证明 $FH = BC = AD$。

师：利用平行四边形对边平行证明平行，他从所要求证的结论

出发来思考。

生3：将$\triangle ABE$绕点E旋转$180°$，就是延长EC到H，使$EH=EA$，这样$\triangle HEF\cong\triangle AEB$，就可得到$FH \underline{\parallel} AB \underline{\parallel} CD$，所以四边形$HCDF$是平行四边形，所以$DF\parallel AC$。

师：由"E是BF的中点"这一条件出发考虑，利用图形旋转添加辅助线，再利用平行四边形对边平行证明直线平行。这里证明$FH\parallel AB$用了什么方法？

生3：$\angle H=\angle BAE$。内错角相等，两直线平行。

生4：不添辅助线用比例线段也可以证明平行。只要证明$\dfrac{CG}{CD}=\dfrac{EG}{EF}$就可以了，由$AB\parallel CD$，可得$\dfrac{CG}{AB}=\dfrac{EG}{BE}$，$AB$换成$CD$，$BE$换成$EF$，就好了。

师：这一思路也较为简捷，利用比例线段也是证明两直线平行的重要方法，有好几位同学考虑到了，但有一些同学由于比例式没有选好，没有做出来。本题运用这一方法时，共有三种比例式可选择，要选择与已知条件联系比较密切的比例式，问题就比较容易解决。

接下来请同学们归纳一下证明两直线平行有哪些方法？

生5：可以利用比例线段（师：三角形一边平行线的判定）、平行四边形的对边平行、中位线定理（师：三角形中位线、梯形中位线）。

师：还有其他方法吗？

生3：同位角相等、内错角相等、或同旁内角互补；还有平行线的传递性。

师：除这些之外，在一次函数图象中，还可以用……（生：斜率相同）这些都是证明两直线平行的常用方法。

我们再来归纳一下，要证明一个几何题，在分析时，可以从哪些角度出发进行思考？

生7：一般可以从结论出发考虑，有哪些方法可以用，再找一个可以做的方法。

师：对，要证明某一个结论往往会有好几种方法，要找到它成立的条件，这样从可能性较大的开始找下去，并结合已知条件，看其中有没有，或能不能推出，如生2、生4的思考方法。还可以怎样思考？

生1：也可以从条件出发，要看哪种方法方便。

师：很好！他（生1）和生3的方法就是这样思考得到的，他们从已知条件中的某一个条件出发进行思考，充分利用已经推出的结论和其他的已知条件逐步推出结论。必要时我们还可将几个已知条件和结合起来考虑，可以得出什么结论、可以运用什么方法；有时还可将结论与某一个条件或几个条件结合起来思考。

由于教师在作业中有用两种方法证明的要求，虽然有些学生只做出一种方法，但学生在完成作业时有了较为充分的思考，更激发了他们的求知欲望，有些学生虽然做出两种方法，但不是最简便的，他们也期望倾听其他同学的想法。教师在引导与讲评时，选择了能够用平行线判定方法的典型问题、抓住了典型的方法和典型的思路，在组织学生交流时，及时地做出了评价并点出了要点。利用一题多解的各种方法和思路，重点突出了平行线证明方法的归纳，目的是解决学生证明两直线平行的方法不熟悉的问题，使学生对平行线的证明有较为系统的掌握；突出了证明题的思路分析和归纳，目的是解决学生不会分析的问题，使学生对证明题的分析方法有一个较为系统的认识。但在证明思路的讲评上过于抽象，学生可能无法体会。

（五）拓展性原则

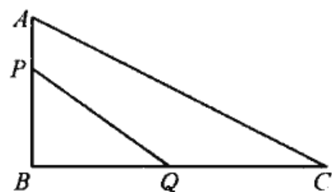
作业讲评决不只是教师讲，而要注重学生课内、课外的“练”，除了补充同类练习，进一步巩固知识，反馈讲评效果外，还要透过具体问题拓展外延把作业题进行变化，可通过“一题多变”、“一题多拓”的方法，以培养学生举一反三、灵活运用知识的能力。

讲评时不能就题论题，而要把题目的知识点向深度和广度上加以引申，使学生将学到的某些原理、知识能用到学习新知识或解决

新问题中去。可以在原有题目的基础上借题发挥，也可以对结论进行引申，对条件进行变换，还可以将知识扩展、深化、适当增加难度，让学生在作业讲评中能有所发现，有所提高，并对作业题型、知识与方法，解题思路和技巧进行归纳小结，从中获得规律性，从而帮助学生提高研究问题的能力。这样的讲解才能提高学生触类旁通的能力，达到解一题、学一法、会一类、通一片的目的。同时也有助于克服目前存在的"题海战术"弊端，减轻学生的学习负担，保证讲评课取得最佳效果。

案例 1：

在$\triangle ABC$中，$\angle B=90^\circ$，$AB=6$，$BC=12$，点P从点A开始沿AB边向点B以1厘米/秒的速度运动，点Q从点B开始沿BC边向点C以2厘米/秒的速度运动，如果P、Q分别从A、B同时出发，问经过几秒钟后，$\triangle PBQ$的面积等于8平方厘米？



拓展1：若原题条件不变，把问题改为：问$\triangle PBQ$的面积能否等于$\triangle ABC$面积的一半？如果可能，求出所需时间；如果不可能，说明理由。

目的是巩固原有的知识和方法，同样可列方程：若$S_{\triangle PBQ}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，则$\frac{1}{2}(6-t)\cdot 2t=\frac{1}{2}\times 6\times 12$，方程无解，得出结果是不可能的。与此同时引导学生突破原有的思维模式和思维定势，从二次函数的角度考虑：由$S_{\triangle PBQ}$的最大值小于$S_{\triangle ABC}$的一半得出结论，培养学生思维的发散性。

拓展2：原题条件不变，把问题进一步改为：$\triangle PBQ$能否与$\triangle ABC$相似？并说明理由。

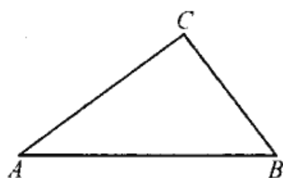
本题通过"一题多解"、"一题多变"拓展知识和方法，使学生明确知识的内在联系，更好地培养学生的思维品质。

案例 2:

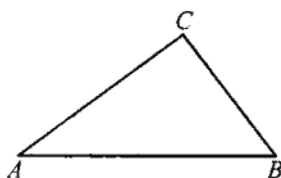
在讲评作业题:"在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C = 90°$, $AB = 8$, $BC = 6$, MN 垂直平分 AB, MN 与 AC、AB 分别交于点 M、N,求 MN 的长。"归纳方法后,教师进一步拓展为不同情况的图形翻折问题:

已知,在$\triangle ABC$ 中,$\angle C = 90°$, $BC = 6$, $AC = 8$,点 M、N 在$\triangle ABC$ 的边上,将$\triangle ABC$ 沿直线 MN 对折后,它的一个顶点正好落在对边上,且折痕 MN 截$\triangle ABC$ 所成的小三角形(即对折后的重叠部分)与$\triangle ABC$ 相似。请在备用图(不一定都用,不够可添)中分别画出折痕 MN 各种可能的位置,并分别说明画法及求出折痕的长。

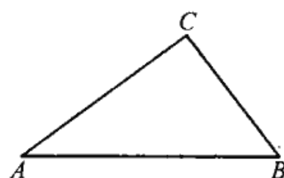
备用图:



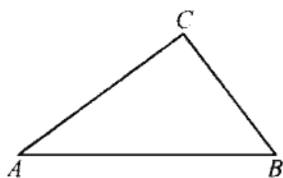
图一



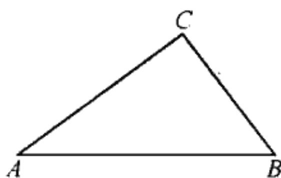
图二



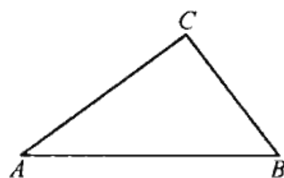
图三



图四



图五



图六

学生通过尝试、交流,得出下列结论:

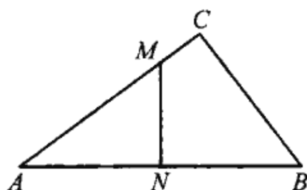
(1) 分别作 AC、AB 的中点 M、N(或 N、M),连结 MN。(图略) $MN = \frac{1}{2}BC = 3$。

(2) 分别作 BC、BA 的中点 M、N(或 N、M),连结 MN。(图略) $MN = \frac{1}{2}AC = 4$。

(3) 分别作 CA、CB 的中点 M、N(或 N、M),连结 MN。(图略)

$AB = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$，$MN = \frac{1}{2}AB = 5$。

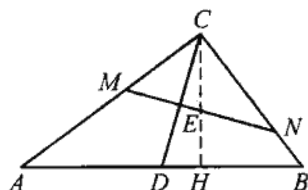
(4) 如图，作 AB 的垂直平分线交 AC、AB 分别于点 M、N(或 N、M)。



由$\triangle AMN$与$\triangle ABC$相似得：$\frac{MN}{5} = \frac{6}{8}$，$MN = \frac{15}{4}$。

(5) 如图，作 AB 的中点 D，连结 CD，作 CD 的垂直平分线交 CA、CB 分别于点 M、N(或 N、M)，交 CD 于点 E。

$CD = \frac{1}{2}AB = 5$，$CE = \frac{1}{2}CD = \frac{5}{2}$。



过点 C 作 $CH \perp AB$，垂足为 H，

由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH = \frac{1}{2}CA \cdot CB$，得

$$CH = \frac{CA \cdot CB}{AB} = \frac{8 \times 6}{10} = \frac{24}{5}。$$

由$\triangle AMN$与$\triangle ABC$相似得：$\frac{MN}{AB} = \frac{CE}{CH}$，$MN = \frac{AB \cdot CE}{CH} = \frac{125}{24}$。

并发现本题中折痕 MN 位置的确定方法有以下的几种：

(1) 从三角形相似的条件出发考虑，折痕与三角形的两边相交，那么折痕 MN 与第三边之间的位置关系可分为平行与不平行两种类型。①当 MN 与第三边平行时，由 MN 垂直平分对称点的连线可知，MN 是$\triangle ABC$ 高的垂直平分线(就是$\triangle ABC$ 的中位线，有三条)；②当 MN 与第三边不平行时，由相似三角形对应角相等可知，MN 可以是 AB 的垂直平分线或者是 AB 边上中线的垂直平分线(有两条)。这样共有五种不同的位置。

(2) 从翻折后顶点落在对边上这一条件出发考虑，根据三个顶点分三种情况进行讨论。考虑到题中所要求的小三角形必须是直

角三角形，①当点 A 落在 BC 边上时，有点 A 落在点 C 或点 B 两种可能，这时 MN 为 AC 或 AB 的垂直平分线；②当点 B 落在 AC 边上时，有点 B 落在点 C 或点 A 两种可能，这时 MN 为 BC 或 AB 的垂直平分线（其中 AB 的垂直平分线与点 A 落在点 B 时相同）；③当点 C 落在 AB 边上时，有点 C 落在 AB 边上的高及中线的另一端点两种可能，这时 MN 为 AB 边上的高或中线的垂直平分线。这样共有五种不同的位置。

(3) 可根据条件做一个三角形纸片模型，将三角形的一个顶点折到对边上，并移动这个点的位置，进行操作、观察、猜想，结合条件进行分析；也可综合(1)、(2)的方法进行思考、探索。

对于折痕 MN 的长的计算，可根据勾股定理、中位线定理、对称点的性质、相似三角形的有关性质、面积方法等灵活解决。

本题是一个开放性的几何作图与计算问题，折痕的条数及位置都具有不确定性，问题的结论具有一定的开放性。在知识内容拓展和问题形式拓展的同时，在解题策略和思想方法上也有了进一步的拓展，本题的解题过程需通过探索，可以从不同的角度，多种方法地进行思考，在思维方式上也具有一定的开放性，解答中的前几种情况较为容易，而最后一种情况具有一定的难度，需要灵活运用所学的知识解决问题。主要体现了空间想象能力、推理分析能力、运算能力等数学能力及分类讨论思想、图形运动变换思想、转化思想、面积方法等数学思想方法，为优秀学生思维进一步发展提供了更大的空间。

（六）及时性原则

根据心理学的测试，人们记忆遗忘的规律是作业与讲评间隔的时间越短，遗忘的越少；作业与讲评间隔的时间越长，遗忘的东西越多。作业过程中学生有很多解题的念头和想法，即使是作业上做错了甚至没有做的题，他们都曾有过若干思维的火花，若不及时交流这些火花就会熄灭。作业后教师必须及时、尽快地批阅完作业，抓住学生的薄弱环节，有针对性地“专题补差”，充分利用学生对知识

在头脑中形成的记忆表象，及时纠正错误，以便夯实基础，强化学生记忆，从而提高学生的学习效果。若不及时讲评，学生对所做习题印象会逐渐淡薄。时间拖得越长，讲评的效果也就越差，使问题积累，造成恶性循环。因此讲评作业要及时，学生完成作业后应趁热打铁及时给学生解惑，纠正错误。这样省时省力效率高，效果好，否则搁置的时间长了将事倍功半。

案例：

在二次根式中以提高运算能力为目标的作业讲评时，其中有这样一道题：化简 $\sqrt{12^2+18^2}$，从学生作业反馈看，75%左右的学生能得到正确结论，但普遍采用程序性的运算，先求得被开方数中两数平方的和，最后再化简二次根式。从基本知识和基本技能的角度来说，学生达到了学习的预期要求，但从学生运算能力的发展来说，学生没有达到要求。因此，趁学生对题目以及对解法记忆犹新时，及时对作业进行了讲评。讲评时在肯定学生成绩的同时，向学生提出：二次根式的化简主要是进行什么样的工作（一是把被开方式中的平方因式或平方数往根号外提，二是将被开方数中含有分母的部分去掉）。对于这个题目还可以怎样进行化简？此时大部分学生想到了被开方数可以先提取 6^2，可将 6 直接移到根号外。大大简化了计算，并提高了计算的正确率。

（七）启发性原则

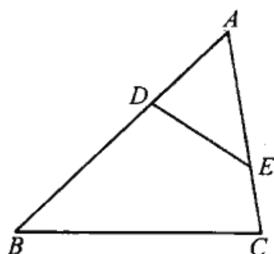
作业讲评时，教师应根据学生在答题中的实际情况，精心设疑，巧妙提问，恰当引导，耐心启发，让学生通过独立认真地思考，从而获得知识和方法。特别是综合性探索性的作业题，也是评价学生数学探索、解决问题水平的主要题目。这些问题往往对大多数学生有困难，需要教师在作业讲评中引导学生进行深入思考、透彻分析。教师可根据问题中的有关信息，启发学生开展联想，运用所学知识、

方法，寻找解题思路。启发的关键是要设计好引导性的问题，并根据学生的实际情况作好应变。通过启发学生思维，可以消除学生的恐惧心理，养成认真思考的习惯，还可以使他们得到成功的满足，提高自信心。

案例：

作业题目：如图，在$\triangle ABC$中，点D、E分别在AB、AC边上，$\angle ADE=\angle C$，$BD=AE+AD$，$CE=AE-AD$，求$BC:DE$的值。

本题大部分学生能由题意得出：$\triangle ABC\backsim\triangle AED$，但由于没有已知的线段或线段比无法直接求出$BC:DE$的值，学生出现思维上的障碍，这时教师可根据学生的反应，进行适当、适时的启发。



师：由$\triangle ABC\backsim\triangle AED$，你能得到什么结论？$\left(\text{对应边成比例：}\frac{BC}{ED}=\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}\text{。}\right)$条件$BD=AE+AD$，$CE=AE-AD$如何利用？与上述比例式中的线段能不能联系起来？

生1：如果设$AE=x$，$AD=y$，那么BD、CE、AD、AB、AE、AC都可以用x、y表示，代入比例式就可得到方程。

师：当有关线段无法直接计算时，通过设未知数，利用方程来解决问题，将几何计算问题转化为代数计算问题，这是一个很好的思想方法，不仅表示简捷，而且数量关系也更为清晰。

师：请同学们试一试用他（生1）的方法能不能解决问题？（学生尝试）

教师观察发现大部分学生得出$BD=x+y$，$CE=x-y$，$AC=2x-y$，$AB=x+2y$和$\frac{BC}{DE}=\frac{x+2y}{x}=\frac{2x-y}{y}$后再次出现思维上的障碍，这时请一位学生谈谈想法。

生2：只能得到一个方程，而这里有两个未知数，无法求出x、y的值。

师：这里确实只能得到一个关于 x、y 的方程，x、y 的值无法确定，但是题目是否要求出线段长度？只要求什么？（稍作停顿）能否利用 x、y 的关系求出 $BC:DE$ 的值？

（学生再次尝试）

生 3：由 x、y 的方程可得：$xy+2y^2=2x^2-xy$，化简得 $x^2-xy+y^2=0$，所以 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}y$（负值不符合题意舍去），代入比例式就可求出 $\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AD}=\frac{2x-y}{y}=\frac{(1+\sqrt{5})y-y}{y}=\sqrt{5}$。

师：还有不同的解法吗？

生 4：$\because$ $x^2-xy+y^2=0$ 中 $y\neq 0$，

$\therefore\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}+1=0$，$\frac{x}{y}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（负值不符合题意舍去），

$\therefore\frac{BC}{DE}=\frac{2x-y}{y}=2\cdot\frac{x}{y}-1=2\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1=\sqrt{5}$。

师：由于本题只能得出一个独立的二元方程，不可能求出 x 与 y 的值，但可发现它可转化为一个二次的齐次方程，他（生 4）是先求出 x 与 y 的比值$\left(\text{一般地对于齐次的二元二次方程 } ax^2+bxy+cy^2=0\text{，当 } b^2-4ac\geqslant 0 \text{ 时，都能求出}\frac{x}{y}\text{的值}\right)$，进一步求得 $BC:DE$ 的值。而前面一个同学（生 3）在得出二元二次方程后，用一个未知数表示另一个未知数，再用同一个未知数表示 AC、AD 的长，同样能求出 AC 与 AD 的比值，从而得到 $BC:DE$ 的值。

本题是方程知识与相似三角形结合的综合问题，需设两个独立的未知数，建立二元方程，是本题的第一个难点；而利用 x、y 的关系求出 $BC:DE$ 的值，是本题的又一个难点。当学生思维出现障碍时，教师适时地通过设问，启发学生的思维，为突破难点进行适度的引导。教学中教师问题的设计为学生提供思维的起点，又留出了一

定的思维空间。

（八）导向性原则

作业讲评中要注意学习方法和解题方法的指导。教师应该努力让学生形成解决问题时先寻找思路、在思路接通后再进行具体的推理或运算的良好习惯；摒弃拿到题目就动笔、写到哪里算哪里、做不下去再涂改的不良习惯。在问题解决后，对问题解决的方法进行评价、反思、概括，从问题解决的过程中提炼出数学思想方法和解决一类问题的策略，使学生把知识学深学透；在此基础上学生把已经学过的东西咀嚼、消化，组织整理，反复推敲，融会贯通，提炼出关键性的问题来，看出了来龙去脉，抓住了要点，再和以往学过的比较，弄清楚究竟有什么新内容、新方法。经过这样消化后的东西，就能够得心应手。把所讲评的内容纳入已学过的模式，归入知识和思想方法的系统结构。进一步优化了学生的思维模式，在把新知识纳入原认知结构的同时，还改造了认知结构，使它和新知识顺应，从而形成新认知结构。

作业讲评时对作业认真、质量较好的同学应予表扬鼓励，鼓舞士气，提高学生学习积极性，也是一种积极的导向。

（九）激励性原则

心理学研究表明：学生的学习心理动机常表现为希望得到好的成绩，希望经常受到教师的赞扬等等，具有好胜性和荣耀性等心理倾向。数学作业讲评应保持和强化这些心理动机，因此，激励应贯穿于整个讲评始终。对于基础较好的学生应注重班级同学之间的横向评价与比较，交流新颖的思路和独到的见解、找出差距，能起到激励、鞭策的作用。对于成绩提高幅度较大学生，要进一步肯定他们的学习态度，帮助找出他们学习中好方法，巩固取得的成绩。特别是对于原来基础较差的同学应注重个人纵向评价与比较，教师应从作业中捕捉其闪光点，让他们认识自己知道已经掌握了哪些知识和方法、学会了什么，让他们体会到通过自己的努力是能够学会数学的，有时会收到意想不到的效果。

通过作业的讲评，充分调动学生学习数学的兴趣、情感等积

极因素，激发学生勤奋好学的愿望，促进智力因素与非智力因素协调发展。充分信任学生，教师只有真正地信任自己的学生，才会大胆地放手让学生自己去探索学习，也只有充分信任自己的学生，在教学中才会注意强调学生的主体作用，把学生的个性发展放在第一位。让学生感受到自己对他们的信任，增强学生的自信心与自主探究的欲望，在教师充分信任的目光和鼓励下，学生想通过自主学习解决困难的愿望会更强烈。创造一个平等自由、相互接纳的和谐氛围，让每个学生积极投入、充分参与，让每个学生体验学习中的成功感、自豪感，继而培养旺盛的求知欲和强烈的好奇心。

需要注意的是(在教学实际中常常见到)，不管学生作业上解答如何，教师只讲学生的问题，把讲评变成"批评"，把出现问题责任全部推给学生，弄得学生灰溜溜的，抬不起头来，教学中应该避免。

(十) 互动性原则

作业讲评作为师生交流的平台，应是师生交流、生生交流的重要的契机。教师不能因时间紧、作业量大只顾教师讲，上成教师的一言堂。要给学生表述自己思维过程的机会，增加教师与学生、学生与学生讨论问题的时间，允许学生对习题及解题过程的"评价"做出"反评价"。通过学生积极主动参与，得到相互启迪，使整个讲评过程学生情绪亢奋，容易接受大量的有关知识及解题的信息，有助于知识的掌握和解题能力的提高。

案例①：

题目：客车和货车同时从两地出发，相向而行。客车每小时行60千米，货车每小时行50千米，经过5小时两车相遇。求相遇时，两车所行的路程比。

---

① 引自：杨燕. 让数学作业评讲焕发光彩. 贵港市覃塘区大岭中心小学网，2009年4月3日

评讲时，我让学生说说自己的解法。一个学生说可以分别求出两车相遇时所行的路程，也就是300千米和250千米，写出比之后化简得6∶5。其余学生都赞成这方法。我又让学生观察客货两车的速度比发现也是6∶5，速度比和路程比是相同的，这是为什么呢？有学生经思考后发现，将刚才的解答过程写成$(60\times5):(50\times5)$，时间相同可以约分，最终路程的比其实就是速度的比。接着又有学生说："我们还可以直接得出答案6∶5，因为两车速度比是6∶5，路程就是将两车速度分别乘时间，根据比的基本性质，前项和后项同时乘5，比值不变，还是6∶5。"他的回答得到了大家热烈的掌声。在学生已基本发现"时间相同，速度比就是路程比"这一个结论后，我又启发学生想一想，在其他数学问题中有没有类似的知识？经过小组交流讨论，学生们的回答五彩纷呈。他们有的说："工作时间相同，工作效率比就是工作总量的比。"也有学生说："购买的数量相同，单价比就是总价比。"还有学生想到："两个圆的半径比就是它们的直径比，周长比。"、"两个长方形宽相同，长的比就是面积的比。"……

现在想来，这道题不评讲或者简单地一笔带过，大多数学生也能将它正确解答出来，可是多问一个为什么，让学生多观察一会儿、想一会儿，却能促使他们从本质上理解其中的算理，由此还衍生出这么多相关知识，学生不仅学会了一道题，更学会了一种思想方法，体验到的不仅是解答出一道题带来的喜悦，更是一种发现的成功感。这样的作业评讲，各个层次的学生都有收获。

第二节　数学作业讲评的内容与要求

一、数学作业讲评的内容

数学作业讲评的内容要突出重点、选择典型问题，讲共性、讲方法、讲类型、讲思路。一般有以下几方面：

（一）纠正错误，体现数学内容的准确性

纠正错误是讲评的关键。分析错误原因是正确的先导，剖析错误是作业讲评的重要内容之一。教师应把学生作业中的错误归纳、概括，找到通病和典型错误，找准其思维的薄弱点，有针对性地引导学生辨析，找准错因、错源，探究正确思路，做到触类旁通。使学生思维的严密性、批判性、灵活性、深刻性和创造性得到最有效的提高。针对学生练习中出现的问题精心设计难度相当的练习题，加强针对性练习，使之强化，当堂反馈补救。

案例：

在三年级口算中，出现这样的错误 1200÷20＝6、3600÷60＝6，这是因为许多学生不清楚除法的性质，只要找到错误的原因，问题自然会迎刃而解。

（二）规范表达，体现数学语言的简洁性

学生的作业要按照数学学科的规范性进行，即解题的规范。总的要求是条理清楚、逻辑紧密，恰当使用数学语言。在数学作业的讲评中，要在确保学生审题准确的前提下，注意解题的逻辑性、严密性，在书写的清晰性、规范性、整洁性、美观性、简洁性等方面进行严格的要求和训练，容不得半点马虎，稍有不慎，便会出差错。有些题目看起来简单，但它对解题的规范化提出了较高的要求。因此，在讲评时要注重这方面的问题，要给学生讲清讲透，让学生在以后的解题过程中始终想着这一点，在表述时做到简洁、规范。

如几何证明题每一步推理的条件必须充分，注意推理过程必需严密、逻辑顺序合理、思路清晰与条理清楚。要把推理的过程写清楚，要明确每一步的推理依据。

（三）交流想法，体现数学思维的灵活性

作业讲评中，对学生作业中的疑惑、想法、方法、思路、创见等进

行交流是作业讲评中的重要内容。教师经常性的单独讲评往往会造成学生视觉和听觉的疲劳，容易滋生倦怠情绪，注意力也会分散，导致讲评效果不理想。由于对所评作业学生已独立思考解决过，学生或多或少已形成个人的认识，这就为教师“放手”提供了有利条件。

教师应努力营造民主、和谐的讲评氛围，相信学生，适时改教师主导下的“讲”为师生共同参与下的“议”，让学生充分展示自己的思考，暴露思维过程，包括典型错误的思考、巧妙的方法等，加之教师的引导、点拨，在质疑和争辩中实现作业问题的有效解决。作业讲评的信息也实现了从“单向传递”向“多向传递”的转变，能达到优劣互补、取长补短的目的。也可适时组织一些学生进行小组交流，小组内优生可以帮助中等生和后进生，中等生和后进生在这个过程中可以学习到优生的解题思路与方法，而优生同样也可以在别的同学身上发现自己的问题，在帮助别人的同时对自己也是一次检验。在此过程中，组内成员都有发表自己意见的机会，也有倾听别人想法的机会，在不知不觉中锻炼了自己与别人合作、交流、探讨的能力。

案例：

在教比例应用题之后，有这样一道作业题：一个班男生和女生人数的比是3∶2，已知男生有30人，求女生有多少人？

在作业批改时，发现学生做法各种各样，因此在讲评作业时，首先把发言权交给了有着不同解法的学生代表。有同学用比例方法解答，即设女生有x人，得$\frac{3}{2}=\frac{30}{x}$；有的同学用分数的方法解答，即$30\div\frac{3}{2}$或$30\times\frac{2}{3}$；有的同学用归一法解答，即$30\div3\times2$；还有的同学把分数同按比例分配知识联系起来，列出$30\div\frac{3}{2+3}-30$的式子。在学生代表讲完各自的解法后，教师再作点评，其中对学生渗透着这样的要求：中差生要牢牢掌握用一般的方法——比例方法求解，

然后再理解或追求其他解法；对于优等生来讲，鼓励其追求不同方法进行解题，以开拓思维。

（四）变式训练，体现数学认知的发展性

作业讲评过程中必须有练的环节，可以在讲评之前练习，也可以讲评中间练习或是讲评之后练习。如果是重复性的机械性的训练，学生必然会厌烦。而变式训练有利于提高学生积极参与讲评过程的热情，激发学生的求知欲望，提高作业讲评的有效性；有利于发掘学生的学习潜力，培养学生思维的广阔性与深刻性，提高学生的数学学习能力。

作业讲评中必须注意的是，变式训练要根据不同的讲评内容、讲评目标，合理地选择变式的方法。当作业中习题难度较高或学生基础较差时，可以通过习题的变式适当降低难度或设置一定的坡度以降低思维的起点，进行讲评之前的练习；当出现几个难点时，可在讲评之前或讲评之中通过习题的变式各个击破；而讲后练习的变式可依据拓展性原则，采用将作业题做情景变式、结论的变式或引申、条件的变式、逆向变式、图形变式、解题方法变式、解题策略变式、解题思想变式等方法，以实现再现思路、拓展思路、获取新知、形成技能、找出规律、归纳方法、领悟思想、发展认知等讲评目标。

作业讲评中，教师要充分利用作业中的习题，引发学生思考，透过现象寻本质，从“变”的现象中发现“不变”的本质，从“不变”的本质中探究“变”的规律，灵活运用变式训练，提升作业讲评的有效性。

（五）总结规律，体现数学解题的方法性

规律提炼是讲评的重点，作业中的题目仅仅是例子、一种模型，所以只有引导学生掌握解题的规律，帮助学生通过一道题看出一类题解决问题的本质，才能帮助学生开启知识宝库的大门。教师应将规律的总结作为一作业讲评的重点。规律是抽象的，但若在解题过程中详加钻研，还是能够发现规律的蛛丝马迹的。在开拓解题思路、总结解题规律时，要抓住“通性通法”与特殊方法和思路。通性

通法是指具有普遍性和共性的常规解法，抓通法，可以加深对知识、技能的理解和记忆，强化公式、法则的运用；而特殊的方法和思路，是根据问题的特殊性所产生的特殊的简便方法和思路，可以开启智慧大门，使能力得以升华。

（六）指导方法，体现数学学习的导向性

作业讲评中，教师要对学生的学习方法和解题方法、解题策略等进行指导。通过作业讲评使学生会用批评的眼光去反思自己的解题过程，看看思路是否有问题，概念使用是否正确，计算是否有失误，思考是否周密等等。有时需要从不同的角度去思考，用不同的方法去演算更能发现问题，指导学生掌握解题具体方法，形成技能，例如，解答选择题时可采用比较法、排除法、图象法、特殊值法；引导学生在分析问题结构特征的基础上进行解题定向，首先在方法论层次上解决问题（确定解题方向和解题计划），再在实证层次上解决问题（进行具体的计算或论证）。

案例：

作业题：如果函数 $y=(m-2)x+m$ 的图象经过第一、二、四象限，求 m 的取值范围。

讲评时，教师请学生归纳解法：由图象的大致位置可知函数 $y=(m-2)x+m$ 是一次函数，且 y 随着 x 的增大而减小，可得 $\begin{cases} m-2<0, \\ m>0, \end{cases}$ 解得 $0<m<2$。之后教师把作业题目变为：如果函数 $y=(m-2)x+m$ 的图象不经过第三象限，求 m 的取值范围。

由于本题没有明确这个函数是不是一次函数，因此需要分两种情况考虑；当这个函数为一次函数时，由于象限的情况也没有确定，还需考虑它为正比例函数时的特殊情况。

学生在本题的解题过程中，最容易遗漏常值函数及正比例函数这两种特殊的情况，或只考虑其中的一种情况。教师通过观察发现：作业中约有10%的学生得出正确答案 $0\leqslant m\leqslant 2$，但其中一半学

生，表述不够规范或不够简捷；约有 20%学生得出答案 $0 \leqslant m < 2$；约有 50%学生得出答案 $0 < m < 2$；其余约 20%学生主要是不等号方向等一些问题。说明绝大部分学生已掌握一次函数一般情况的图象位置与系数的关系，而绝大部分学生没有掌握一次函数应满足的条件及一次函数与正比例函数关系。

讲评时，教师先提出问题：函数 $y = (m-2)x + m$ 是什么函数？

大部分学生脱口而出：是一次函数。

这时有一些学生认为不一定：当 $m = 0$ 时，是正比例函数。

教师进一步提问：正比例函数是不是一次函数？

这时大部分学生认识到：正比例函数是一次函数的特殊情况，解题时遗漏正比例函数。

此时又有学生提出：当 $m = 2$ 时，这个函数不是一次函数，是常值函数。它的图象在一、二象限，也是符合题意的。这时其他学生才意识到还遗漏常值函数的情况。

教师进一步提问：解题时先要做什么？

生：画出不经过第三象限的各种可能图象。

师：有哪几种情况？

生：经过第一、二、四象限的直线；经过二、四和原点的直线；还有一、二象限且平行于 x 轴的直线。(教师画出图形)

师：还有其它情况吗？不要再漏噢？

生：还有一、四象限且平行于 y 轴的直线。(教师画出图形)

师：这种情况可能吗？

生：不可能，它不是函数。

师：还有吗？

(思考后)生：没有了。

师：那么解题时应怎么做？

生：分三种情况分类讨论。

师：请同学把解题过程写来。(学生订正错误)

一位学生在黑板上板演：解：(1) 当 $m-2=0$ 即 $m=2$ 时，函数

为 $y=2$，是常值函数，经过第一、二象限不经过第三象限，符合题意；

(2) 当 $m=0$ 时，函数为 $y=-2x$，是正比例函数，图象经过二、四象限，不经过第三象限，符合题意；

(3) 当 $m\neq 0$ 且 $m\neq 2$ 时，函数为一次函数，图象经过第一、二、四象限得：$\begin{cases} m-2<0, \\ m>0, \end{cases}$ 解得 $0<m<2$。

师：最后的结论呢？

生补上：所以 m 的取值范围是 $0\leqslant m\leqslant 2$。

师：同学们看一看他的解法对吗？还有不同的想法吗？

生：对的。可以把(2)(3)并在一起：

当 $m-2\neq 0$ 时，函数为一次函数，由于它的图象不经过第三象限可以得到：$\begin{cases} m-2<0, \\ m\geqslant 0, \end{cases}$ 解得 $0\leqslant m<2$。这样写起来简单一些。

师：很好，由于正比例函数是一次函数的特殊情况，可以把这两种情况合为一种情况，那么这只要分成两种情况。这样解题更为简捷。

之后教师再次将作业题目变为：如果函数 $y=(m-2)x+m$ 的图象不经过第二象限，求 m 的取值范围。（与上题不同的是这时此函数为常值函数的情况不能成立）在变式中巩固提高。

教师在讲评时，先注意观察了解学生错误的情况，及时分析学生错误的原因，在变式训练中巩固所学知识，突出数形结合、分类讨论等数学的思想方法。讲评过程中采用师生互动的方法，讲中有练、练中有讲，注重方法的指导，针对学生的问题，层层递进，各个击破。通过教师启发，引导让学生主动地去发现问题，明确错误的原因，自主纠正作业中的错误，获取过程的体验。并注意到表达规范与数学语言简洁性的体现。学生的想法得到交流、思维过程得以展现。

二、数学作业讲评的要求

数学作业的讲评，是数学教学的一环，老师要认真设计、精心实施。

（一）准备充分

充分准备的作业讲评才是有效的讲评。

在作业的批改环节，可以用记录表记录下学生作业完成的情况，例如，全部做对的同学有哪些，某一问题做对的有哪些同学，题目没有做的有哪些同学，典型错误有几种类型，出现了哪些优秀解法，等等，在讲评之前要有充分的准备。

讲评之前要明确讲评目标、确定讲评重点，包括讲哪些解题方法，对学生的解题方法要熟悉，明确是否要补充练习，需要变式的题目要选编好。

（二）形式多样

采取各种形式的讲评方法，避免单一的方式引起学生枯燥乏味的感觉。例如，用学生容易理解的方式讲解，学生作为小老师给大家讲解思路和方法；老师把学生出错的地方另外编一个题目，让学生先做，根据做的结果再进行针对性讲评；组织学生来讨论怎么讲解，让学生比较各种解法好与不好，并发表自己的见解。

讲评时可个别讲评与集体讲评相结合；教师讲评与学生讲评相结合；详细讲评与简略讲评相结合；过程讲评与答案讲评相结合；思路分析与习题解答相结合。

（三）条理清楚

老师的脑子里对讲评的安排要有条理。时间安排有条理，先讲什么后讲什么，合理安排；内容安排有条理，理清内容前后的联系；逻辑关系不混乱，形散而神不散。

（四）评价客观

作业讲评，通常需要对学生作业的总体情况以及每个学生作业

的具体情况进行评价。评价要讲清道理，令学生信服。教师不能主观臆断，哪些学生作业好与不好，不凭印象，要实事求是地分析，避免情绪化和随意性。

第三节　数学作业讲评的方法

一、教师讲解为主的讲评

教师讲解为主的讲评主要体现在对学生学习方法的指导、知识内容的梳理、解题规范的说明、解题策略的指导、解题思路的分析、解题规律的归纳、问题的启发与引导、思想方法的总结等由于学生学习水平与能力水平的限制而无法独立完成的内容。如小学低年级由于学生语言水平与表达的困难，有很多内容的作业讲评是以教师讲解为主的。一般以教师讲解为主的讲评信息量较大，讲解内容多，会对学生的记忆和理解造成一定的困难。所以讲解时不能教师一讲到底，要有学生思考、练习和交流，学生能讲的要让学生讲，学生能做的就给学生做。

案例 1：

高中的一节作业讲评课，老师讲解的作业题目

题目 1：在 1 与 999 之间插入 100 个数，使得这 102 个数组成一等差数列，试求这样插入的 100 个数的和。

老师解答并板书：设插入的 100 个数依次为 a_2、a_3、a_4、…、a_{101}，由 $a_2+a_{101}=1+999$ 得 $a_2+a_3+\cdots+a_{101}=100\cdot\left(\frac{1+999}{2}\right)=$ 50 000。

紧接着，讲评下面的题目：

题目 2：若单调递增数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n = n^2 + an$，求实数a的取值范围。

老师先做简单的评论：这是一道数列与函数的综合题，很遗憾，我班同学错的很多，我们可以这样解：（板书下面的解答内容）

因为数列$\{a_n\}$单调递增，所以$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$，即$a_n < a_{n+1}$对一切自然数$n \in \mathbf{N}^*$恒成立。$n^2 + an < (n+1)^2 + a(n+1)$，展开并移项得，$a > -(2n+1)$对一切自然数$n \in \mathbf{N}^*$恒成立。所以$a > (-2n-1)_{\max} = -3$，即$a > -3$。

多数学生认真记下老师的解答。

本案例有这么几点值得肯定：(1)老师在所布置的作业中，能够精心选择需要讲解的内容，从老师的评论中，我们可以发现是以学生错得多作为讲评题目的一个选择依据；(2)老师对如何讲解题目解答有了充分的准备，而且很熟练；(3)老师注意对解题方法的讲解。

对第一个问题，老师是运用等差数列的性质处理问题；而学生则是按照题目的结构依照求等差数列的前n项和的思路。例如学生解答：插入的 100 个数的和 = 102 个数的和 $-(1+999)$，$S_{102} = \dfrac{102(1+999)}{2} = 51\,000$，所以插入的 100 个数和为 50 000。

如果我们讲评时不尊重学生的想法，直接把自己的想法灌输给学生，学生会不服气，因为他的做法有自己的思考，符合常规，老师应给予肯定。

不妨换一种方式，先让学生介绍自己的解法，老师给予点评，之后再把不同的解法介绍给学生，并对两种方法进行对比分析，这样做更能引起学生的学习兴趣。

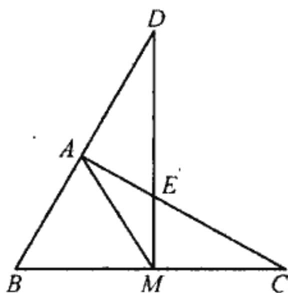
对第二个问题，老师的思路很巧妙，利用对任意的自然数$n \in \mathbf{N}^*$，$a_n < a_{n+1}$恒成立转化为$a > (-2n-1)_{\max} = -3$。对于普通中学的同学在理解上有多重障碍，单调性怎么转化到相邻两项的比

较？相邻两项的大小关系又是怎样转化到表达式的最大值问题的？这些理解的难点老师不进行仔细分析，学生难免似懂非懂、不得要领。也许从二次函数出发，结合图象，学生会更容易理解问题的解答。

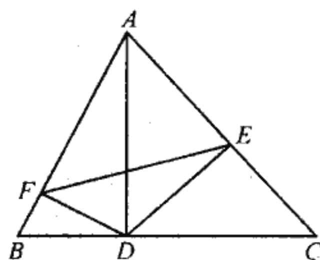
案例 2：

作业题：1. 如图(1)，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，M是BC的中点，$DM \perp BC$交AC于点E，交BA的延长线于点D。求证：$MA^2=MD\cdot ME$。

分析：若熟悉基本图形(5)，很快由所要证的结论：$MA^2=MD\cdot ME$，找到目标相似形：$\triangle MAE \backsim \triangle MDA$，而要证$\triangle MAE \backsim \triangle MDA$，只需证明$\angle MAE=\angle D$。显然，通过互余关系可以得到$\angle MAE=\angle D$。



图(1)



图(2)

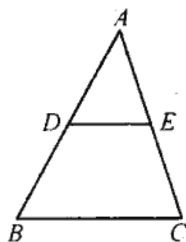
2. 如图(2)，在$\triangle ABC$中，$AD \perp BC$于D，$DE \perp AC$于E，$DF \perp AB$于F，连结EF，求证：$\angle AEF=\angle B$。

分析：$\angle AEF$存在于$\triangle AEF$中，要证$\angle AEF=\angle B$，即证：$\triangle AEF \backsim \triangle ABC$，此乃基本图形(5)。另，由三个垂直关系可以找到有公共边AD的两个基本图形(9)。而这几个基本图形涉及的公有线段为：AE、AC、AF、AB。所以由基本图形(9)，即$\triangle ADF \backsim \triangle ABD$，$\triangle ADE \backsim \triangle ACD$，可得：$AD^2=AF\cdot AB$，$AD^2=AE\cdot AC$，从而有：$AF\cdot AB=AE\cdot AC$，再根据$\angle BAC$是公共角，便能证

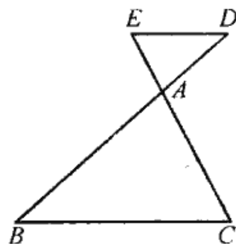
得目标相似形：$\triangle AEF \backsim \triangle ABC$。

可见在几何题中，倘若遇到复杂的几何图形时，先不要“惧怕”，而是静心找到其中隐含的基本图形，“化解”图形的“复杂”，以使问题迎刃而解。

① 平行型

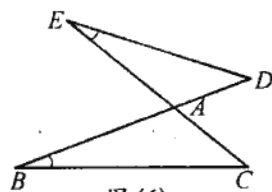


图(3)

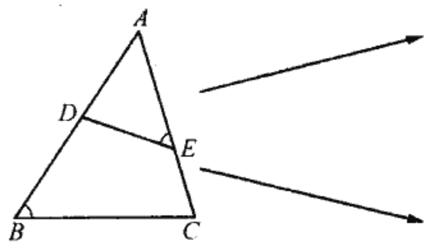


图(4)

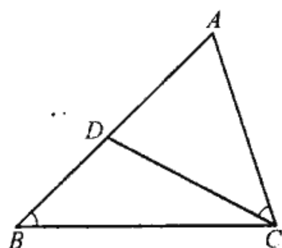
② 旋转型



图(6)



图(5)

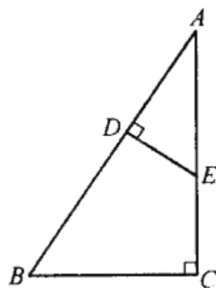


图(7)

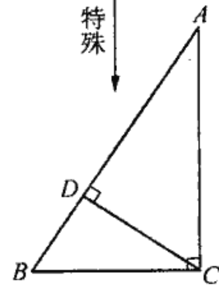
特殊

特殊

③ 垂直型



图(8)



图(9)

其中，在图(7)中常见的线段关系式为：$AC^2 = AD \cdot AB$，图(9)中则为：$AC^2 = AD \cdot AB$，$BC^2 = BD \cdot AB$，$CD^2 = AD \cdot DB$。

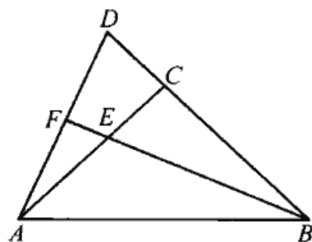
二、学生交流为主的讲评

学生交流为主的讲评主要体现在学生对学习方法的交流，对解题过程的讨论、知识内容的理解、解题规范的演示、解题疑问的提出、解题思路的讲述、不同解题方法的展示，对解题规律归纳的尝试、对思想方法的认识等学生能够独立完成的内容或经过小组讨论能够解决的问题。一般以学生交流为主的讲评，学生对过程的体验较为深刻，有利于解决解题疑问、明确解题过程、理解解题方法，但在讲评时用的时间往往较多，所以讲评时教师必须进行引导，提出相应的问题，适时地根据情况进行调控。

案例 1：

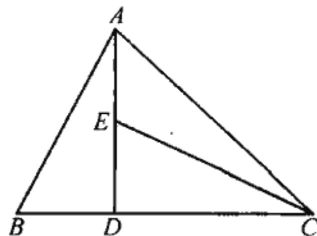
七年级第二学期数学课本练习有这样两道题目：

1. 已知$\triangle ABC$中，$AD \perp BC$，D是垂足，E是AD上一点，连结CE并延长交AB于点F，且$CE = AB$，$\angle 1 = \angle 2$，试说明$AD = DC$的理由。



2. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，已知$\angle ABC = 90°$，$CA = CB$。点D在BC的延长线上，点E在AC上，且$CD = CE$，连结BE、AD，延长BE与AD相交于点F。试说明$AD = BE$的理由。

这两道题看似没什么关系，其实很多老师一看就知道它们本质上就是一题，根据这两道习题，我设置了这样一组作业题。



1. 如图，已知$\triangle ABC$中，$AD \perp BC$，D是垂足，$AD = DC$，$DE = DB$。试说明：(1) $\angle DEC = \angle B$。(2)延长CE交AB于F，说明$CF \perp AB$。

2. 图形不变，条件变为：已知$\triangle ABC$中，$AD \perp BC$，D是垂足，$CF \perp AB$，垂足

为 F，$AD = DC$；试说明 $CE = AB$，$DE = DB$ 的理由。

3. 图形不变，你还可以怎样改变已知条件并得到怎样的结论？

4. 若$\triangle ABC$是钝角三角形，$\angle BAC$是钝角，高 AD、CF 所在的直线交于点 E，且 $AD = DC$，那么$\triangle CDE$与$\triangle ADB$全等还成立吗？（请自己试着画图，并证明你的结论）

学生讲评结果：

这组题由于源于课本的课后习题，学生有一定的基础，方法上有一定的共性，所以并不是很难解决，而且第 4 题又是在"学生的最近发展区"内进行的设置，有一定基础的同学只要有勇攀高峰的勇气和毅力都可以进行相关的思索。所以在作业讲评时，教师主要以学生的交流为主。学生得出如下的结论：

(1) 已知 AD、CF 是$\triangle ABC$的高，且 AD、CF 交于点 E，$\angle ACB = 45°$，连结 BE，试说明：$CE = AB$，$\triangle BED$是等腰直角三角形。

(2) 已知 AD、CF 是$\triangle ABC$的高，且 AD、CF 交于点 E，$CE = AB$。试说明 $AD = DC$。

(3) 已知 AD 是$\triangle ABC$的高，E 在 AD 上，$\angle BAD = \angle DCE$，$CE = AB$。试说明 $AD = DC$。

本次作业让学生体会到一题多变的好处，让他们感受到了成功，让他们在理性思维上更进了一步，增强了学数学的自信，同时也体现了数学的德育功能。

（上海市静安区育才初级中学　王进敬　提供）

案例 2：

问题：以 $AB = 20$ mm，$BC = 30$ mm，$CD = 18$ mm，$DA = 21$ mm 为边，画四边形 $ABCD$。和同学们比较一下，大家画出的四边形形状一样吗？如果使 $\angle ABC = 60°$，再画这个四边形，大家画的形状一样吗？

这是一道作图题，题中仅给出了四边形的四条边的长，要画出

这个四边形，不少学生感到困惑，认为这个四边形形状不确定，不知怎样画。教师及时介入作如下启发引导：在黑板上画一个四边形 $ABCD$，告诉学生这个四边形的边长如果就是题中各边的长，那么这个四边形是不是题中要画的四边形呢？交给学生讨论，并作出确认就是要画的四边形。再问这个所要画的四边形的角的大小有没有要求？学生回答角的大小并无要求，即这里对角的大小是可以任意选定，只要不超过 $180°$。学生在课堂练习本上画好图后，四人一组进行比较并回答，各人所画的四边形的形状相同吗？为什么？若选定 $\angle B = 60°$，则$\angle B$ 的两边 $BA = 20\,\text{mm}$，$BC = 30\,\text{mm}$，则$\triangle ABC$ 可画，又 $AB = 21\,\text{mm}$，$CD = 18\,\text{mm}$，则$\triangle ABC$ 可画，从而四边形 $ABCD$ 可画。最后师生共同画出这个四边形。接着要求学生按题目要求，使 $\angle B = 60°$ 各边长不变，重画一个四边形 $ABCD$，再让学生进行比较并回答：这次各人所画的四边形的形状相同吗？为什么呢？让学生通过讨论明白：当四边形的四边长固定时不能确定四边形的形状，这是四边形的不稳定性所决定的。当这个四边形中只要有一个角的大小固定了，因这个角的两边是固定的，所以这个角所对的对角线长也就确定了，这时四边形的形状也就确定了，同学们画的四边形的形状就都相同了。

三、师生互动的讲评

师生互动的讲评主要体现在教师引导学生交流数学学习的方法；引导学生发现作业中的错误、分析错误的原因、帮助学生改正错误；组织学生对解题过程、方法、思路、规律的讨论、交流，教师进行归纳、指导和总结；组织变式训练以巩固、拓展与提高。它以能发挥教师讲解为主的讲评与学生交流为主的讲评的各自的优势，取长补短，教师应根据讲评的目标、内容与学生的情况，作出合理的安排，争取在有限的讲评时间内，取得最佳效果，提高讲评的实效性。

案例1：

作业题：过抛物线 $y^2=6x$ 的焦点 F 作一条斜率为1的直线，交抛物线于 A、B 两点，(1)求 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}$ 的值。(2)如果直线的斜率为2，$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}$ 的值又多少呢？

学生在作业后发现，虽然直线 AB 的斜率是不同的，但是 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}$ 的值是不变的。讲评时，教师逐步提出问题：

"如果抛物线的方程是 $y^2=7x$、$y^2=3x$、$y^2=16x$，结果又怎么样呢？"

"如果抛物线方程变为 $y^2=2px(p>0)$，$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}$ 的值又是多少呢？"

学生："$\frac{2}{p}$"。"你能证明吗？"……学生边讨论边完成证明。

然而使老师意想不到的是讲完后有几个学生问："老师，在椭圆中有这样类似的结论吗？"对于这个问题老师也不清楚，但老师很高兴地说："大胆的想法！我也不知道，要不我们一起试试看？"……师生一起探讨、交流、合作，完成得到了肯定的结论。我用赞赏的语气对他们说："你们的发现很了不起，让我也在你们的问题中增长了知识！"可这些学生还是不肯罢休，几天后又发现了问题："老师，我们用类似的方法对双曲线也进行了研究，结果也找到了类似的结论。"在这整个过程中，教师只是一个引导者：通过变式设计一个一个的问题情景，"把问题作为教学的出发点"，"让问题处于学生思维水平的最近发展区"，引导学生逐步发现问题、提出问题、分析问题、解决问题。这样师生互动的课上多了，学生也会受到启发，自发地进行变式，从而逐渐会想、会提出问题。当然，只有这些也还是不够的，这是因为——培养学生的问题意识，要让学生想得有意义，问得有价值。

案例 2：

作业题：在四边形 $ABCD$ 中，AC、BD 交于点 O。

(1) 若 $\frac{AO}{CO}=\frac{DO}{BO}$，求证：$\triangle AOD\backsim\triangle COB$。问：此时$\triangle AOB$ 与$\triangle DOC$ 相似吗？请举例说明。

(2) 若 $AO\cdot CO=DO\cdot BO$，问$\triangle AOD$ 与$\triangle COB$ 相似吗？$\triangle AOB$ 与$\triangle DOC$ 呢？证明你的结论。

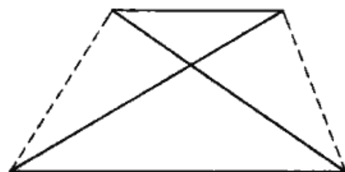
(3) 若 $BD\perp DC$，$CA\perp AB$，求证：$OA\cdot OC=OB\cdot OD$。

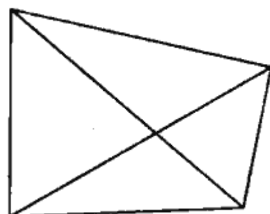
(4) 若延长 BA、CD 交于点 M，①求证：$\triangle MAD\backsim\triangle MCB$。②若 $AD=\frac{1}{2}BC$，求$\angle M$ 的度数。

本题是课本例题的变式，不同的是它要求学生自己画出图形，分析问题，联系学过的其他知识，完全做对并不容易。

教师在讲评时主要抓住了以下几个方面：1. 基本图形的判断与分析。2. 基本画图能力的培养。3. 合理地将不同的题目安排不同的图形。

在讲评该题目时，前两问由于学生完成得比较好，所以第(1)和(2)问是学生进行简单的讲评，但为了深化学生对基本图形的掌握，教师对两种基本图形进行了强调，一个是图 1，另一个是图 2。


图 1


图 2

第(3)和(4)问实质上是强调了一个三角形中出现两条高这一重要图形的知识上的延伸，需要一定的分析问题的能力，如果运用“由果索因”的方法比较能够抓住要点，直接切入主题，教师在讲评

时一定要有培养学生解题能力的意识，千万不要一讲到底。先进行点拨，然后再由学生独立思考或组内讨论，集体交流思路的方法完成。在讲解的过程中，教师起点拨、引领的作用，所有动笔上的操作包括画图都应该由学生自己完成。

在作业的讲评上，根据题目的难易、学生的情况等多种原因选择不同的讲解方法，真正发展学生的数学思维。而数学思维中一个重要的问题是数学意识的孕育与培养。清朝学者袁枚说过："数学知识需要数学能力来驾驭，但数学意识更为重要，数学意识决定思考的方向。"

本章小结

数学作业讲评是数学教学与学习过程中不可或缺的重要一环。本章从对教师进行数学作业讲评的意义出发，介绍作业讲评的原则、内容以及要求，并结合实例简要介绍三种讲评的方法。

问题讨论

1. 作业讲评时，需要注意知识的前后联系，一般不能用后面的知识解决前面的问题，但是可以适当向后拓展。这里涉及到对知识的系统性怎么处理，你认为怎么解决比较恰当？

2. 作业的讲评，需要理清思路，体现数学活动的有序性，有时还需要评析学生创见，体现数学思考的创造性。请你举例说明怎样处理。

3. 作业讲评的方法本章是从师生关系方面来说的，从内容方面、形式方面或其他方面，你认为还可以采用怎样的讲评方法？

主要参考文献

[1] 田万海主编.数学教育学.杭州:浙江教育出版社,1992年

[2] 施良方,崔允漷主编.《教学理论:课堂教学的原理、策略与研究》.上海:华东师大出版社,1999年

[3] 雷玲主编.中学数学名师教学艺术.上海:华东师大出版社,2008年

[4] 田万海主编.1987年全国初中数学教学调查与分析.上海:华东师大出版社,1990年

[5] 金一鸣等编.刘佛年教育文选.上海:华东师大出版社,1999年

[6] [美]G·波利亚著,涂泓,冯承天译.怎样解题——数学思维的新方法(新1版).上海:上海科技教育出版社,2007年

[7] 杨钋,林小英编,陈向明指导.聆听与倾诉——质的研究方法应用论文集.北京:教育科学出版社,2001年6月

[8] 辞海编撰委员会.《辞海》教育心理分册.上海:上海辞书出版社,1999年9月

[9] 《简明国际教育百科全书.教学》(下).北京:教育科学出版社,1991年

[10] 中国社科院语言研究所词典编辑室.现代汉语词典(修订本),第3版.北京:商务印书馆,北京:1998年

[11] [德]赫尔巴特著,李其龙译.普通教育学教育学讲授纲要.杭州:浙江教育出版社,2002年

[12] 凯洛夫.实用教学技术.教育科学出版社,北京:1994年

[13] 凯洛夫著,沈颖等译.教育学(上).北京:人民教育出版社,1951年12月第二次修订原版

[14] 顾明远主编.《教育大辞典》(第1卷).上海:上海教育出版社,1989年

[15] Thomas L. Good, Jere E. Brophy著,陶志琼等译.透视课堂.北京:中国轻工业出版社,2002年

[16] 张奠宙等著.数学教育学.南昌:江西教育出版社,1991年

[17] 张焕庭主编.西方资产阶级教育论著选.北京:人民教育出版社,1979年

[18] 饶玲主编.课程与教学论.北京:中国时代经济出版社,2004年

[19] 南京师大教育系编.教育学.上海:人民教育出版社,上海:1984年

[20] 上海市教育委员会编.上海市中小学数学课程标准.上海:上海教育出版社,2004年

[21] 李庚南.数学自学·议论·引导教学法.北京:人民教育出版社,2005年

11 月
[22] 孙志远编著.初中数学课堂教学.长沙:湖南教育出版社,1996 年
[23] 张庆林.高效率教学.北京:人民教育出版社,2002 年
[24] 高级中学课本.数学.上海:上海教育出版社,2007 年
[25] 杨世明等著.MM 教育方式理论与实践.香港新闻出版社
[26] 戴再平著.数学习题理论.上海教育出版社,1993 年
[27] [英]Hazel Hagger, Donald McIntyre 著,马晓梅,张昔阳译.向经验教师学习指南.上海:华东师大出版社,2009 年
[28] [日]佐藤学著.钟启泉译.课程与教师.北京:教育科学出版社,2003 年
[29] 朱萍,陆少明主编.小学微笑教学的研究——“阳光校园”的实践探索.上海教育出版社,2009 年
[30] 段鸿,高正玲.教学论应重视学生作业问题研究.固原师专学报(社会科学),1999 年第 2 期
[31] 姜丽华.优化小学生课外作业数量的研究——从大连市小学生课外作业的现状说起.教育科学,1998 年第 2 期
[32] 斯文.关于中小学家庭作业问题的调查与思考.安徽教育,2000.1—2
[33] 上海市松江区初中副校长研修班.初中学生家庭作业有效性现状及改进策略.现代教学,2008.1—2
[34] 赵才欣.以有效性为导向建立作业新体系.现代教学,2008.1—2
[35] 张宝昆,王仁虎.外国教育文献.2004 年第 5 卷第 4 期
[36] 刘光会.新课程背景下普通高中数学作业的有效性研究.华东师范大学,硕士学位论文,2007 年 10 月
[37] 程高学.初中数学作业布置及批改研究.西北师范大学,硕士学位论文,2006 年 11 月
[38] 徐金梅.初中数学例题及习题教学之研究.内蒙古师范大学,硕士学位论文,2007 年 6 月
[39] 黄东兰.中学数学习题教学理论与实践.福建师范大学,硕士学位论文,2003 年 8 月
[40] 张献峰.高中生对斜率概念的理解.华东师范大学,硕士学位论文,2007 年 10 月
[41] 王东梅.七年级数学作业批改有效性的实践及思考.2006 年杭州市数学会评选论文
[42] 苏军.提升学生上学“幸福感”.文汇报,2009 年 8 月 31 日
[43] 杨玉东,李士锜.用本原性数学问题驱动课堂教学——一项改进教师数学教学的行动研究.数学教育学报,2005 年第 2 期

[44] 杨彩凤等. 关于数学回家作业量的控制的实验研究. 江苏教育研究，1995年第1期
[45] 王文生. 小学中年级数学作业改革实验报告. 教育科学研究，1995年第1期
[46] 唐绍友. 从一次调查看让学生批改作业. 数学教育学报，1998年8月
[47] 田云兰. 谈小学生家庭作业的布置与批改. 教学与管理，2003年第8期
[48] 樊亚东. 心中的远方在这里启航(续)——数学作业批改实录与断想. 中学数学月刊，2009年8月
[49] 王永，佘文森. 教学与发展，载《迎接21世纪挑战的数学教育》，北京：人民教育出版社，1999年
[50] 佘元庆. 谈谈习题的配备与处理——介绍基本外国中学数学课本中的习题配备. 数学通报，1980年第3期
[51] 李茂瑞，段永君，陈玉华. 试谈数学习题的配置原则. 山东教育，2002年第6期
[52] 胡艳梅，赖邦城. 配置数学习题的若干方法. 江西化工，2008年第1期
[53] 上海市二期课改高中数学训练系统研制课题组. 上海市二期课改《高中数学课本·练习部分》编制说明. 数学教学，2006年第10期
[54] 涂荣豹. 论数学教育研究的规范性. 数学教育学报，2003年11月
[55] 李士锜. 熟能生巧吗？数学教育学报，1996年3月
[56] 李士锜. 熟能生笨吗？数学教育学报，1999年8月
[57] 李士锜. 熟能生厌吗？数学教育学报，2000年2月
[58] 胡松林. 数学教师札记. 上海：上海教育出版社，1999年
[59] 俞平. 论数学命题学习. 数学教育学报，1999年11月
[60] 王尚志. 高中数学课程中的函数. 中学数学教学参考(高中版)，2007年11月
[61] 束仁龙. 初中生课外作业配置原则初探. 教学与管理，2001年5月
[62] 尹瑶芳. 小学数学作业批改现状的调查分析. 上海教育科研，2006年8月
[63] 熊川武. 论中学教师"零作业批改". 中国教育学刊，2007年第5期
[64] 任升录. 理解学生的思路找准习题教学的合拍点. 中国数学教育，2006年第5期

[General Information]
书名=数学作业的设计与评价
作者=任升录，黄根初，沈全洪等编著
页数=244
出版社=华东师范大学出版社
出版日期=2009.10
SS号=12384412
DX号=000007515315
url=http://book2.duxiu.com/bookDetail.jsp?dxNumber=000007515315&d=9003FDF8FB7720DC3BC9163EDE1ECD9D&fenlei=0705180406&sw=%CA%FD%D1%A7%D7%F7%D2%B5%B5%C4%C9%E8%BC%C6%D3%EB%C6%C0%BC%DB